院士文丛

YUANSHI WENCONG

Hermite Expansions And
Generalized Functions

Hermite 展开与广义函数

院士文丛

YUANSHI WENCONG

Hermite Expansions And Generalized Functions

Hermite展开与广义函数

丁夏畦　丁 毅　著

华中师范大学出版社

Huazhong Normal University Press

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

Hermite 展开与广义函数/丁夏畦　丁毅　著.
—武汉:华中师范大学出版社,2005.5
(院士文丛)
ISBN 7-5622-3045-5/O·141
Ⅰ.H…　Ⅱ.①丁…　②丁…　Ⅲ.广义函数-研究　Ⅳ.O177.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 004619 号

院士文丛
Hermite 展开与广义函数

著者:© 丁夏畦　丁　毅
责任编辑:刘　敏　**责任校对:**张　忠　**封面设计:**甘　英
编辑室:文字编辑室　电话:027-67863220
出版发行:华中师范大学出版社 ©
社址:湖北省武汉市珞瑜路 100 号　**邮编:**430079
电话:027-67863040　67867076(发行部)　027-67861321(邮购)
传真:027-67863291
网址:http://www.ccnup.com.cn　**电子信箱:**hscbs@public.wh.hb.cn
经销:新华书店湖北发行所
印刷:湖北恒泰印务有限公司　**督印:**姜勇华
字数:92 千字
开本:880mm×1230mm　1/32　**印张:**4.5
版次:2005 年 5 月第 1 版　**印次:**2005 年 5 月第 1 次印刷
印数:1-1000　**定价:**16.00 元

欢迎上网查询、购书

敬告读者:欢迎举报盗版,请打举报电话(027)67861321

序　言

自从 1950 年 Schwartz L 的分布论(Théorie des distributions,Tom Ⅰ,Ⅱ)出版之后,广义函数的理论和应用已经有了很大的发展,几经演变,其理论可以说日趋完善,特别是经过了 Miknsinshi J, Temple G, Lighthill M J 等人的工作,把广义函数理论大大地简化,以致可以在大学课程中讲授.中国华罗庚教授早在 20 世纪 50 年代就注意到广义函数,并提出了自己的想法,他的想法有其独特之处.他本人只在特殊情形,即一维周期广义函数的情形,详细阐述了他的观点.由于后来事情繁杂,他未能在此一方向作出更大发展.这本小册子正是沿着华罗庚教授指出的思路,通过直线上的 Hermite 展式进行工作的一个小结.我们发现,他的想法的确有其优越之处,例述如下:

首先我们可以引进一较 Schwartz 分布论更加广泛的广义函数类,我们称之为弱函数.在某种意义下,这应该是最广的.它还保持 Schwartz 分布的特点,即其 Fourier 变换仍然为弱函数.次之按照华的定义稍稍延伸,我们就可以引进广义数和广义弱函数的概念.利用这些概念我们可以很快解决弱函数的乘积,当然也就包括了 Schwartz 分布的乘积.这个问题长期以来被称为广义函数论的一个困难问题,李邦河运用非标准分析最早给出了它的解答.我们现在运用华的思想,重新

予以处理.

在中国广义函数论的先驱者中,还应提及冯康教授.是他最早在中国介绍广义函数论,并作了广义函数的 Mellin 变换.在本书中我们也沿着华的观点,重新作了处理.

时至今日广义函数理论本身似乎已经很完善了,其实还有许多工作需要做.特别在应用上,虽然有了许多精美的结果,例如在线性偏微分方程论上的应用,特别是在非线性双曲型守恒律方面的应用等.但对经典分析方面应用就还很少,进一步的发展还是值得充分注意的.

这本小册子只是这方面工作的一个导引.还有许多丰富的内容有待进一步完善,这只有待于来日.

作　者

2005 年 5 月

Preface

Ever since the publication of L. Schwartz's theory of distributions (Théorie des distributions, Tom Ⅰ, Ⅱ) in 1950 — 1951, theory of generalized functions and its applications have developed dramatically. After having gone through some changes, it can be said that the theory has grown more and more in perfection. J. Miknsinshi, G. Temple, and M. J. Lighthill have even simplified theory of generalized functions, and made it a college course. Chinese mathematician Luoken Hua had noticed the generalized functions as early as the 1950's and had proposed his own interpretation. However, he only worked on a special case — the one dimensional periodic generalized functions. He did not continue to develop the area because he was occupied with other work. This present book is a collection of research on generalized functions according to Hua's ideas based on Hermite expansions. We have discovered that Hua's interpretation certainly has its advantages, as follows:

First, we can introduce a type of generalized functions more general than Schwartz's distributions, which we call weak functions. In some sense, this type is the most generalized. These generalized functions still keep the main characteristic of the Schwartz's temperate distributions, i.

e., the Fourier transform of each weak function is still a weak function. Secondly, extending Hua's definition a little further, we can introduce concepts of generalized numbers and generalized weak functions. Using these concepts, we can resolve the multiplication of weak functions, which therefore has included the multiplication of Schwartz's distributions. Such multiplication has been regarded as a difficult problem for a long time. Banghe Li was the first to resolve this problem by using non-standard analysis. In this work, we again research on this problem, by Hua's idea.

Among the Chinese pioneer researchers of generalized functions, we should mention Professor Kang Feng. He was the first person to introduce generalized functions theory in China and did research on Mellin transforms. In this book, we also again treat Mellin transforms from Hua's point of view.

Certainly, theory of generalized functions itself seems to have evolved quite far in our time. Indeed, there have been many successful applications that have produced elegant results. Examples are in its applications to linear partial differential equations theory and to nonlinear hyperbolic conservation laws. However, there have been few applications to classical analysis, so it is worth paying more attention to developing further applications to such analysis.

This book is only an introduction to such research results. There is still much rich content to be improved upon and perfected, which is only to be discovered in the future.

the Author

May, 2005

内容简介

本书以 Hermite 多项式为工具,引进了新的广义函数,作者们称之为弱函数。它包括了许多经典的广义函数。继而引进了广义数,广义弱函数,解决了弱函数乘法问题。作者们还讨论了该理论在经典分析例如 Riemann zeta一函数论和非线性双曲型守恒律论上的应用。

本书是华罗庚教授关于广义函数论思想的进一步发展。

Abstract

By Hermite polynomials, this monograph proposes a new theory of generalized functions. The authors introduced a new kind of generalized functions called weak functions, which include many classical ones. Furthermore they introduced the concepts of generalized numbers and generalized weak functions, and then solved the multiplication problem of weak functions. They also discussed the applications of the theory above in some classical analysis such as the theory of Riemann zeta-function and the theory of nonlinear hyperbolic conservation laws.

The present monograph develops Professor Hua Luoken's idea in his theory of generalized functions.

目　　录

第一章　Hermite 多项式的基本性质

Hermite 多项式是一组正交多项式，它在数学物理和数学分析中是很有用处的. 我们现在讨论它的一些基本性质.

1. 定义与生成函数

定义 1.1.1　Hermite 多项式 $H_n(x)$ 的定义如下：

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, n=0,1,2,\cdots \tag{1.1.1}$$

容易看出：$H_0(x)=1, H_1(x)=2x, H_2(x)=4x^2-2, H_3(x)=8x^3-12x,\cdots$，它的一般形式为

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}, \tag{1.1.2}$$

其中$\left[\frac{n}{2}\right]$代表$\frac{n}{2}$的整数部分.

这样的 $H_n(x)$ 还可从下面的展式

$$w(x,t)=e^{2xt-t^2}=e^{x^2}e^{-(t-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n \tag{1.1.3}$$

中得出. 为此只需注意到

$$\left(\frac{\partial^n w}{\partial t^n}\right)_{t=0}=e^{x^2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-(x-t)^2}\Big|_{t=0}$$

$$= e^{x^2}(-1)^n \frac{\partial^n e^{-u^2}}{\partial u^n}\bigg|_{u=x} = H_n(x). \quad (1.1.4)$$

由于 $w(x,t)$ 为 x 与 t 的整函数,故(1.1.3)式在 x,t 的任何有限区域内都是一致收敛的,且逐项可微,因此我们有

$$\frac{\partial w}{\partial t} - 2(x-t)w = 0, \quad (1.1.5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 2tw = 0. \quad (1.1.6)$$

由(1.1.5)式,有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0.$$

比较 t^n 的系数,就得到

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \ (n = 1,2,\cdots). \quad (1.1.7)$$

由(1.1.6)式,我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0,$$

故得

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (n = 1,2,\cdots). \quad (1.1.8)$$

由(1.1.7)式和(1.1.8)式,得

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H'_n(x) = 0,$$

对上式逐项微分,就有

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad (n = 1,2,\cdots). \quad (1.1.9)$$

此为 $H_n(x)$ 满足的微分方程.

如果令

$$u = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad (1.1.10)$$

则

$$u' = e^{-\frac{x^2}{2}}(-xH_n(x) + H'_n(x)).$$

容易得出

$$u'' + (2n+1)u - x^2 u = 0. \quad (1.1.11)$$

如果在等式(1.1.3)中令 $x = 0$,就得到

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \ H_{2n+1}(0) = 0. \quad (1.1.12)$$

由等式(1.1.3)知

$$w(x,u)w(x,v) = e^{2x(u+v)-u^2-v^2}$$

$$= \sum_{m,n} \frac{H_m(x)}{m!} \frac{H_n(x)}{n!} u^m v^n,$$

得

$$e^{-(x-(u+v))^2+2uv} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}}{m!\ n!} u^m v^n,$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-(u+v))^2} e^{2uv} dx = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx}{m!\ n!} u^m v^n$$

$$= \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2uv)^n}{n!}.$$

故得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x)e^{-x^2} dx = 2^n n!\sqrt{\pi} = c_n^2.$$

今后我们还令

$$\psi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{c_n}. \qquad (1.1.13)$$

2. Mehler 公式,参看[B6]

如果 $|t|<1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{2^n n!} t^n H_n(x) H_n(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left\{\frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right\}, \qquad (1.2.1)$$

此式称为 Mehler 公式.

证 易知

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+2ixu} du.$$

因此(1.2.1)式

$$\text{左边} = \frac{e^{\frac{x^2+y^2}{2}}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-2tuv)^n}{n!} e^{-u^2-v^2+2ixu+2iyv} du dv$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2+2ixu+2iyv-2tuv} du dv$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-t^2)u^2+2i(x-yt)u} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left\{\frac{1}{2}(x^2-y^2) - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right\}.$$

上式积分与求和之可交换是由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\rho uv)^n}{n!} e^{-u^2-v^2+2Au+2Bv} du dv.$$

当 $\rho<1$ 时为收敛.

3. $H_n(x)$ 的渐近性

在这一节我们将探讨 $H_n(x)$ 和 $\psi_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的渐近性态. 令 $u = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$,则由(1.1.11)式知 u 满足微分方程

$$u'' + (2n+1)u = x^2 u.$$

将右端看作已知,$u(x)$ 满足初值 $u(0) = H_n(0)$,$u'(0) = H'_n(0)$,则我们又得出 u 的另一表达式

$$u(x) = H_n(0)\cos\sqrt{2n+1}x + H'_n(0)\frac{\sin\sqrt{2n+1}x}{\sqrt{2n+1}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \int_0^x y^2 u(y) \sin[\sqrt{2n+1}(x-y)] dy.$$

$$(1.3.1)$$

由(1.1.12)式知

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)}, \quad H_{2m+1}(0) = 0,$$

$$H'_{2m}(0) = 0, \quad H'_{2m+1}(0) = 2(-1)^m \frac{\Gamma(2m+2)}{\Gamma(m+1)},$$

则(1.3.1)式可写为

$$u(x) = \alpha_n \left\{\cos\left(\sqrt{2n+1}x - \frac{n\pi}{2}\right) + r_n(x)\right\}, \qquad (1.3.2)$$

其中

$$\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, & n \text{ 为偶数}; \\[2ex] \dfrac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2n+1}}, & n \text{ 为奇数}, \end{cases} \qquad (1.3.3)$$

$$r_n = \frac{1}{\alpha_n\sqrt{2n+1}}\int_0^x y^2 u(y)\sin[\sqrt{2n+1}(x-y)]\mathrm{d}y, \tag{1.3.4}$$

当 x 为任意实数时，

$$\begin{aligned}
|r_n(x)| &\leqslant \frac{1}{\alpha_n\sqrt{2n+1}}\left\{\int_0^{|x|} y^4\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^{|x|} u^2(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha_n\sqrt{2n+1}}\left\{\int_0^{|x|} y^4\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^{\infty} u^2(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}{\alpha_n\sqrt{2n+1}}\frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \beta_n |x|^{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

由 Stirling 公式知，当 $n\to\infty$ 时，

$$\alpha_n \sim 2^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}},\quad 2^n n!\sqrt{\pi} \sim 2^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}\pi, \tag{1.3.5}$$

故对任何 n，$\beta_n n^{\frac{1}{4}}$ 为有界，因此

$$|r_n(x)| \leqslant c\frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{1}{4}}}. \tag{1.3.6}$$

由此知对任何有限值 x 而言

$$u(x) \sim \alpha_n \cos\left(\sqrt{2n+1}x - \frac{n\pi}{2}\right)\qquad (n\to\infty),$$

此即

$$\mathrm{H}_n(x) \sim 2^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left\{\cos\left(\sqrt{2n+1}x - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{1}{4}}}\right)\right\}, \tag{1.3.7}$$

$$\psi_n(x) = \frac{\mathrm{H}_n(x)}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\sim\sqrt{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left\{\cos\left(\sqrt{2n+1}x - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{1}{4}}}\right)\right\}. \tag{1.3.8}$$

4. $L_2(-\infty,+\infty)$ 的一组正交基

我们令

$$\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{c_n},\quad \varphi_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{H}_n(x),$$

$$c_n^2 = 2^n n!\sqrt{\pi},\quad \mathrm{h}_n(x) = \frac{\mathrm{H}_n(x)}{c_n}, \tag{1.4.1}$$

则由前面所述，易知 $\{\psi_n(x)\}$ 构成一组正交系，$\{\mathrm{h}_n(x)\}$ 构成以 e^{-x^2} 为权的一组正交系，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{m,n},\quad \delta_{m,n} = \begin{cases}1, & m=n;\\ 0, & m\neq n,\end{cases}$$

此即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{h}_m(x)\mathrm{h}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \delta_{m,n}.$$

下面将证明 $\psi_m(x)$ 构成 $L_2(-\infty,+\infty)$ 的一组完全正交基，我们称之为 Hermite 基. 即有

定理 1.4.1　如果 $f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$，令

$$a_m = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x, \tag{1.4.2}$$

(积分显然为收敛) 则我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_m\psi_m(x)\right|^2\mathrm{d}x \to 0, \text{当 } N\to\infty. \tag{1.4.3}$$

证　由 Mehler 公式，如果令

$$K(x,y,t)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\exp\left\{\frac{x^2-y^2}{2}-\frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right\}, \qquad (1.4.4)$$

则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n\psi_n(x)\psi_n(y)=K(x,y,t)\geqslant 0. \qquad (1.4.5)$$

今作变数变换 $y=\frac{2xt}{1+t^2}+u$， 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1-t^2}{2(1+t^2)}x^2\right\}}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1+t^2}{2(1-t^2)}u^2\right\}\mathrm{d}u$$

$$=\sqrt{\frac{2}{1+t^2}}\exp\left\{-\frac{1-t^2}{2(1+t^2)}x^2\right\}\to 1,\text{当 } t\to 1 \text{ 时}.$$

此外，不难看出，当 $t\to 1$ 时，

$$K(x,y,t)\to 0,\quad \text{当 } |x-y|>\delta,$$

且这种收敛对固定 x,y 有界时为一致的. 因此对任何 $f(x)\in C_0^{\infty}$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)(f(y)-f(x))\mathrm{d}y$$

$$+f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{|y-x|<\delta}K(x,y,t)(f(y)-f(x))\mathrm{d}y+\int_{A>|y-x|>\delta}K(x,y,t)(f(y)$$

$$-f(x))\mathrm{d}y+f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)\mathrm{d}y,$$

故

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)f(y)\mathrm{d}y-f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant\varepsilon\int_{|y-x|<\delta}K(x,y,t)\mathrm{d}y+M\int_{|y-x|>\delta}K(x,y,t)\mathrm{d}y. \qquad (1.4.6)$$

此处由 $f(x)$ 的连续性，知 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$，当 $|y-x|<\delta$，且对任何 y，

$$|f(y)|<M.$$

故由(1.4.6)式知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)f(y)\mathrm{d}y\to f(x),\text{当 } t\to 1.$$

在(1.4.5)式的两边乘以 $f(y)$ 再沿 $(-\infty,+\infty)$ 积分，就会得

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\psi_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)f(y)\mathrm{d}y\to f(x),\text{当 } t\to 1.$$

将上式乘以 $f(x)$ 再积分得

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2t^n\to\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

故得

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x. \qquad (1.4.7)$$

对于任何 $f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$，我们知必有 $f_v(x)\in C_0^{+\infty}$，使

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) - f_v(x) |^2 \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

令

$$a_{n,v} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_v(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x,$$

则有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_{j,v}\psi_j(x)\Big\}^2\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\{f(x)\}^2\mathrm{d}x + \sum_{j=0}^{n} a_{j,v}^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_{j,v}a_j \\
&\geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) |^2\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} a_j^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j\psi_j(x)\Big\}^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

同时，

$$\begin{aligned}
\text{上式左端} &\leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) - f_v(x) |^2\mathrm{d}x \\
&\quad + 2\int_{-\infty}^{+\infty}\{f_v(x) - \sum_{j=0}^{n} a_{j,v}\psi_j(x)\}^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\varepsilon + 2\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} | f_v(x) |^2\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} a_{j,v}^2\Big\} < 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

当 n 充分大.

故(1.4.3)式得证.

以后简记 $L_2(-\infty, +\infty)$ 为 L_2，

$$\| f \| = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} | f |^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

5. $\psi_n(x)$的 Fourier 变换

对于 $\psi_n(x)$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^n}{c_n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy+\frac{x^2}{2}}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^n\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{c_n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy+\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{c_n}\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^n\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x-\mathrm{i}y)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{c_n}\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big)^n\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x-\mathrm{i}y)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{c_n}\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}-\mathrm{i}xy-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{c_n}\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big)^n\mathrm{e}^{-y^2}\sqrt{2\pi} \\
&= \sqrt{2\pi}\,\frac{(-\mathrm{i})^n}{c_n}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{H}_n(y).
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x = (-\mathrm{i})^n\psi_n(y). \tag{1.5.1}$$

显然

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x = \mathrm{i}^n\psi_n(y). \tag{1.5.2}$$

6. 一个恒等式

为了以后应用起见，我们将证明如下的恒等式：

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(y)}{2^n n!}$$

$$= \frac{H_{m+1}(x)H_m(y) - H_{m+1}(y)H_m(x)}{(x-y)2^{m+1} \quad m!}. \qquad (1.6.1)$$

证 我们只需注意到

$$[H_{n+1}(x)H_n(y) - H_{n+1}(y)H_n(x)]$$
$$- 2n[H_n(x)H_{n-1}(y) - H_n(y)H_{n-1}(x)]$$
$$= 2(x-y)H_n(x)H_n(y), \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

将此式除以 $2^n n!$ 再对 n 从 1 到 m 求和,并注意到 $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x$,则得

$$2(x-y)\sum_{n=1}^{m} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!}$$
$$= \frac{H_{m+1}(x)H_m(y) - H_{m+1}(y)H_m(x)}{2^m m!} - 2(x-y).$$

由此就容易得到(1.6.1)式.

7. Hermite 展式的逐点收敛性

在上面第 4 节我们已证明若 $f(x) \in L_2$,则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x),$$

此处级数右端在 L_2 中强收敛,而

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x.$$

今我们将讨论上述级数之逐点收敛性,即若 $f(x)$ 适合某些一般性条件,且在 x 处连续,则级数右端在 x 处收敛且等于 $f(x)$. 为此我们把级数写成如下形式:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{H_n(x)}{c_n}, \quad c_n^2 = 2^n n!\sqrt{\pi},$$

或

$$f(x)e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{c_n} H_n(x).$$

令 $g(x) = f(x)e^{\frac{x^2}{2}}, \frac{a_n}{c_n} = b_n$,则级数变成

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n H_n(x), \qquad (1.7.1)$$

其中

$$b_n = \frac{1}{c_n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{H_n(x)}{c_n}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{c_n^2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x. \qquad (1.7.2)$$

问题就变为 $g(x)$ 在适当条件下,级数(1.7.1) 的逐点收敛性了.

下面的定理证明了 Hermite 展式(1.7.1) 的逐点收敛性.

定理 1.7.1 设 $g(x)$ 为定义于区间$(-\infty, +\infty)$上的任意实值函数,并且满足下列条件:

1) $g(x)$ 在任何有限开区间$(-a, a)$ 内都是分段光滑的函数;

2) 积分$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} g^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

则有 $g(x)$ 的 Hermite 展式逐点收敛到 $g(x)$,只要 $g(x)$ 在 x 点连续.

证 首先我们来证明广义积分(1.7.2) 收敛,从而系数 b_n 是确实可以计算的. 事实上把积分区间分成三部分,就有

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{H}_n(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{-a}\cdots+\int_{-a}^{+a}\cdots+\int_{a}^{+\infty}\cdots$$
$$\equiv I_1+I_2+I_3.$$

因为这种积分在任何有限区间都存在，所以对任何 a，I_2 都是有限的，我们现在只需考虑 I_3（I_1 可以作类似的处理）. 选择适当大的$a>1$，并用定理 1.7.1 的条件 2)，就有

$$I_3\leqslant\int_a^{\infty}|g(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{H}_n(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\int_a^{\infty}|g^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}|\mathrm{d}x+\int_a^{\infty}|\mathrm{H}_n^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}|\mathrm{d}x\right]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\int_a^{\infty}|x|g^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_a^{\infty}|\mathrm{H}_n^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}|\mathrm{d}x\right]$$
$$<\infty.$$

所以广义积分(1.7.2) 收敛.

用 $S_m(x)$ 表示级数(1.7.1) 的前$(m+1)$ 项之和，则

$$S_m(x)=\sum_{n=0}^{m}b_n\mathrm{H}_n(x)$$
$$=\sum_{n=0}^{m}\mathrm{H}_n(x)\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{H}_n(y)g(y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)\mathrm{e}^{-y^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{m}\frac{\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(y)}{2^n n!}\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)\mathrm{e}^{-y^2}K_m(x,y)\mathrm{d}y, \qquad (1.7.3)$$

其中

$$K_m(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{m}\frac{\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(y)}{2^n n!}. \qquad (1.7.4)$$

由(1.6.1) 式我们有

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(y)}{2^n n!}$$
$$=\frac{\mathrm{H}_{m+1}(x)\mathrm{H}_m(y)-\mathrm{H}_{m+1}(y)\mathrm{H}_m(x)}{(x-y)2^{m+1}m!}, \qquad (1.7.5)$$

而且利用$\{\varphi_n(x)\}$ 为正交基我们可以直接从(1.7.4) 式推出下面的恒等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K_m(x,y)\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=1. \qquad (1.7.6)$$

只要注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}_n(y)\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{H}_n(y)\mathrm{H}_0(y)\mathrm{d}y$$
$$=\begin{cases}0, 当\ n\neq 0;\\ 1, 当\ n=0.\end{cases}$$

现在设 x 为 $g(x)$ 的连续点. 由(1.7.3) 式和(1.7.6) 式，我们有

$$S_m(x)-g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_m(x,y)\mathrm{e}^{-y^2}[g(y)-g(x)]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\mathrm{H}_m(x)}{2^{m+1}m!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{H}_{m+1}(y)\varphi(x,y)\mathrm{d}y$$
$$-\frac{\mathrm{H}_{m+1}(x)}{2^{m+1}m!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{H}_m(y)\varphi(x,y)\mathrm{d}y, \qquad (1.7.7)$$

其中

$$\varphi(x,y)=\frac{g(y)-g(x)}{y-x}.$$

为了证明定理,即

$$\lim_{m\to\infty}|S_m(x)-g(x)|=0,$$

我们需要证明下面关于 φ 的引理.

引理 1.7.1 设 $\varphi(x)$ 满足:

1) $\varphi(x)$ 在任何有限区间 $(-a,a)$ 内都是分段连续函数;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^3 e^{-x^2}\varphi^2(x)dx$ 的值是有限的.

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n(x)\varphi(x)dx \qquad (1.7.8)$$

存在.

证 首先将积分(1.7.8)分为三部分.

$$J=\frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n(x)\varphi(x)dx$$

$$=\frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\left\{\int_{-\infty}^{-a}\cdots+\int_{-a}^{a}\cdots+\int_{a}^{\infty}\cdots\right\}$$

$$\equiv J_1+J_2+J_3.$$

利用 Schwartz 不等式

$$|J_1|\leqslant\frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{-a}e^{-x^2}|H_n(x)||\varphi(x)|dx$$

$$\leqslant\frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\left\{\int_{-\infty}^{-a}e^{-x^2}(-x)^{-3}H_n^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left\{\int_{-\infty}^{-a}(-x)^3e^{-x^2}\varphi^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2^n n!\sqrt{\pi})}\int_a^{\infty}e^{-x^2}x^{-3}H_n^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left\{\int_{-\infty}^{-a}e^{-x^2}|x|^3\varphi^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

类似的办法可得到

$$|J_3|\leqslant\left\{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2^n n!\sqrt{\pi})}\int_a^{\infty}e^{-x^2}x^{-3}H_n^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left\{\int_a^{\infty}e^{-x^2}x^3\varphi^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=I_1\cdot I_2.$$

将 I_1 积分分为两部分

$$I_1=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_a^{\infty}e^{-x^2}x^{-3}H_n^2(x)dx$$

$$=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\left\{\int_a^{n^\delta}\cdots+\int_{n^\delta}^{\infty}\cdots\right\}$$

$$=I_{11}+I_{12},$$

取 $\delta=\dfrac{1}{6}$ $(x>n^\delta$,所以 $x^{-3}<n^{-3\delta})$,

$$I_{12}=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{n^\delta}^{\infty}e^{-x^2}x^{-3}H_n^2(x)dx$$

$$\leqslant\frac{n^{\frac{1}{2}-3\delta}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_n^2(x)dx.$$

另一方面,由(1.3.2)式与(1.3.6)式可以得到

$$|I_{11}|\leqslant\frac{\alpha_n^2 n^{\frac{1}{2}}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_a^{n^\delta}\left[1+\frac{cx^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{1}{4}}}\right]^2x^{-3}dx$$

$$=\frac{\alpha_n^2 n^{\frac{1}{2}}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{4c}{n^{\frac{1}{4}}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{c^2}{3n^{\frac{1}{2}}}x^3\right]_{x=a}^{x=n^\delta}\leqslant M,$$

其中 M 是绝对常数,因为根据(1.3.5)式,$\frac{\alpha_n^2 n^{\frac{1}{2}}}{2^n n!\sqrt{\pi}}$ 在 $n\to\infty$ 时有界,由 I_1 的有界性与引理1.7.1的条件2)推知,可选充分大的 $a=a(\varepsilon)$ 使得积分 J_1,J_3 都满足

$$|J_1|<\frac{1}{3}\varepsilon,\qquad |J_3|<\frac{1}{3}\varepsilon,\tag{1.7.9}$$

其中 ε 为任意小的正数.

设 a 为上述取定的数,再用(1.3.2)式可得

$$J_2=\frac{\alpha_n n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\left[\int_{-a}^{a}e^{-\frac{x^2}{2}}\varphi(x)\cos\left(\sqrt{2n+1}x-\frac{n\pi}{2}\right)dx\right.$$
$$\left.+\int_{-a}^{a}e^{-\frac{x^2}{2}}\varphi(x)r_n(x)dx\right],\tag{1.7.10}$$

因为 $\varphi(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ 为分段连续函数,所以当 $n\to\infty$ 时,第一个积分趋于零,并且第二个积分也趋于零,因为按照(1.3.6)式,被积函数

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\varphi(x)r_n(x)=O(n^{-\frac{1}{4}})$$

在整个区间 $(-a,a)$ 内一致成立. 又因为 $\frac{\alpha_n n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}$ 是有界的,所以

$$\lim_{n\to\infty}J_2=0.\tag{1.7.11}$$

由(1.7.9)式和(1.7.11)式可知,当 $n\geqslant N(\varepsilon)$ 时

$$|J|<\varepsilon.\tag{1.7.12}$$

引理 1.7.1 得证.

现在我们来利用引理 1.7.1 完成定理 1.7.1 的证明.

由定理 1.7.1 条件 1),将 $\varphi(x,y)$ 作为 y 的函数时,它在任何有限区间 $(-a,a)$ 内都是分段光滑的,而且由定理 1.7.1 的条件 2) 可知 $|y|^3\varphi^2(y)e^{-y^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上积分值有限,因为对于充分大的正数 $b>x$,

$$\begin{aligned}&\int_b^\infty |y|^3\varphi^2(y)e^{-y^2}dy\\&=\int_b^\infty |y|^2|y|\left[\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right]^2e^{-y^2}dy\\&\leqslant\left(\frac{b}{b-x}\right)^2\int_b^\infty ye^{-y^2}[g(y)-g(x)]^2dy\\&\leqslant 2\left(\frac{b}{b-x}\right)^2\int_b^\infty y[g^2(y)+g^2(x)]e^{-y^2}dy\\&<\infty.\end{aligned}$$

所以利用引理 1.7.1,就有

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)^{\frac{1}{4}}}{[2^{m+1}(m+1)!\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}H_{m+1}(y)\varphi(x,y)dy\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)^{\frac{1}{4}}}{[2^m m!\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}H_m(y)\varphi(x,y)dy\\&=0.\end{aligned}\tag{1.7.13}$$

另一方面,根据(1.3.7)式与斯特灵公式,当 $m\to\infty$ 时,

$$\frac{\{2^{m+1}(m+1)\sqrt{\pi}\}^{\frac{1}{2}}}{(m+1)^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{H_m(x)}{2^{m+1}m!\sqrt{\pi}}$$

和
$$\frac{\{2^m m!\sqrt{\pi}\}^{\frac{1}{2}}}{(m+1)^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{H_{m+1}(x)}{2^{m+1}m!\sqrt{\pi}}$$

保持有界,所以得到

$$\lim_{m\to\infty}[S_m(x)-g(x)]=0.$$

定理 1.7.1 得到证明.

8. Laguerre 多项式

在数学物理的许多问题中,都可以用到 Laguerre 直交多项式.

Laguerre 多项式 $L_n^\alpha(x)$ 定义为下面的公式:

$$L_n^\alpha(x)=\mathrm{e}^x\frac{x^{-\alpha}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x}x^{n+\alpha})\qquad(n=0,1,2,\cdots),\tag{1.8.1}$$

其中实数 $\alpha>-1$.

对右边微分,就可得到零阶、一阶和二阶的 Laguerre 多项式

$$L_0^\alpha=1,$$

$$L_1^\alpha=1+\alpha-x,$$

$$L_2^\alpha=\frac{1}{2}[(1+\alpha)(2+\alpha)-2(2+\alpha)x+x^2].$$

对于一般 n 阶 Laguerre 多项式

$$L_n^\alpha(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\cdot\frac{(-x)^k}{k!(n-k)!},\tag{1.8.2}$$

如果 $k<n$,则

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}$$

$$=(n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots[n+\alpha-(n-k-1)].$$

可以证明 Laguerre 多项式 $L_n^\alpha(x)$ 在区间 $[0,\infty)$ 上关于权函数 $p(x)=x^\alpha\mathrm{e}^{-x}$ 是直交的,即

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)\mathrm{d}x=\frac{(n+\alpha)!}{n!}\delta_{m,n},\tag{1.8.3}$$

这里

$$\delta_{m,n}=\begin{cases}1, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

而且

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha+1}[L_n^\alpha(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{(n+\alpha)!}{n!}(2n+\alpha+1).\tag{1.8.4}$$

Laguerre 多项式还有下面的递推公式

$$\sum_{v=0}^{n}L_v^k(x)=L_n^{k+1}(x)\tag{1.8.5}$$

和

$$L_n^k(x)=L_n^{k+1}(x)-L_{n-1}^{k+1}(x).\tag{1.8.6}$$

我们还有

$$w(x,t)=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\mathrm{e}^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^\alpha(x)t^n.\tag{1.8.7}$$

计算(1.8.7)式右端,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n^\alpha(x)t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{1}{k!(n-k)!}x^kt^n$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{t^n}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-xt)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-xt)^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+m+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{t^m}{m!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-xt)^k}{k!}\frac{1}{(1-t)^{k+\alpha+1}}$$

$$= \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

$$= w(x,t).$$

证毕.

9. Hermite 多项式与 Laguerre 多项式的关系

首先我们要得到 Laguerre 多项式 $L_n^\alpha(x)$ 的积分表达式.

利用 Bessel 函数的级数定义做下面的积分就得到公式

$$x^{n+\alpha}e^{-x} = \int_0^\infty (\sqrt{xt})^{n+\alpha}J_{n+\alpha}(2\sqrt{xt})e^{-t}dt, \qquad (1.9.1)$$

其中 $J_v(z)$ 是 v 阶的 Bessel 函数.

注意到等式

$$\frac{d}{du}u^{\frac{v}{2}}J_v(2\sqrt{u}) = u^{\frac{v-1}{2}}J_{v-1}(2\sqrt{u}).$$

此等式可以用 Bessel 函数的性质

$$\frac{d}{dx}(x^mJ_m(x)) = x^mJ_{m-1}(x)$$

和变换 $x = 2\sqrt{u}$ 而得到.

于是将(1.9.1)式对 x 微分,便得到

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^{m+\alpha}e^{-x}) = \int_0^\infty (\sqrt{xt})^{n-m+\alpha}J_{n-m+\alpha}(2\sqrt{xt})t^me^{-t}dt, \qquad (1.9.2)$$

其中 $m = 0,1,2,\cdots$

HERMITE展开与广义函数_反甲乙

令 $m = n$,并注意到 Laguerre 多项式的定义(1.8.1)便得到 Laguerre 多项式的积分表达式:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^xx^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})$$

$$= \frac{e^xx^{-\alpha}}{n!}\int_0^\infty(\sqrt{xt})^\alpha J_\alpha(2\sqrt{xt})t^ne^{-t}dt,$$

即

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^xx^{-\frac{\alpha}{2}}}{n!}\int_0^\infty t^{n+\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{xt})e^{-t}dt, \qquad (1.9.3)$$

其中 $\alpha > -1; n = 0,1,2,\cdots$

这个公式还可以利用解析延拓推广到任何复数 x.

由公式(1.9.3)可以得到一个重要的推论,即 Hermite 多项式和 Laguerre 多项式的关系. 只要令 $\alpha = \pm\frac{1}{2}$,并利用 Bessel 函数的公式

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,$$

就得到

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{e^xx^{\frac{1}{4}}}{n!}\int_0^\infty t^{n-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi 2\sqrt{xt}}}\cos(2\sqrt{xt})e^{-t}dt$$

$$= \frac{e^x}{n!\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t}t^{n-\frac{1}{2}}\cos(2\sqrt{xt})dt$$

$$= \frac{2e^x}{n!\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2n}\cos(2\sqrt{x}u)du \quad (令\ t = u^2), \qquad (1.9.4)$$

$$L_n^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{e^x x^{-\frac{1}{4}}}{n!}\int_0^\infty t^{n+\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi 2\sqrt{xt}}}\sin(2\sqrt{xt})e^{-t}dt$$

$$= \frac{e^x}{n!\sqrt{\pi}\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-t}t^n\sin(2\sqrt{xt})dt$$

$$= \frac{e^x}{n!\sqrt{x}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2n+1}\sin(2\sqrt{x}u)du. \quad (1.9.5)$$

另一方面,我们来得到 Hermite 多项式的积分表达式.

利用

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos 2xt\,dt$$

和 Hermite 多项式的定义

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),$$

就有

$$H_{2n}(x) = (-1)^{2n}e^{x^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos 2xt\,dt$$

$$= (-1)^n e^{x^2}\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n}\cos 2xt\,dt. \quad (1.9.6)$$

所以

$$H_{2n}(\sqrt{x}) = (-1)^n e^x\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^{2n}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n}\cos(2\sqrt{x}t)dt. \quad (1.9.7)$$

类似的推导,我们可以得到

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n e^{x^2}\cdot\frac{2^{2n+2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n+1}\sin 2xt\,dt. \quad (1.9.8)$$

所以

$$H_{2n+1}(\sqrt{x}) = (-1)^n e^x\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^{2n+1}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n+1}\sin(2\sqrt{x}t)dt. \quad (1.9.9)$$

比较(1.9.4)式与(1.9.7)式就有

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!}H_{2n}(\sqrt{x}). \quad (1.9.10)$$

比较(1.9.5)式与(1.9.9)式就有

$$L_n^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}n!}\cdot\frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}. \quad (1.9.11)$$

上面所得的公式(1.9.10)和(1.9.11)建立了两类直交多项式的关系,由此可将 Hermite 多项式的理论看作是 Laguerre 多项式理论的一个特殊情形.

第二章　S广义函数简介

在本章中讨论 S 广义函数,我们将采用 Lighthill M J 的著作 Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions,Canbridge University Press 1958 一书的观点.

1. *S* 函数类

定义 2.1.1　函数类 S　无穷次可微的函数 $f(x)$ 以及其各阶导数,对于任何 N,当 $x \to \infty$ 时都是 $O(|x|^{-N})$ 时,称 $f(x)$ 为 S 函数. 记为 $f(x) \in S$.

显然,S 构成一线性集. S 函数的一个最重要的性质就是它对 Fourier 变换为自封的,即我们有:

定理 2.1.1　如 $f(x) \in S$,则其 Fourier 变换

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x$$

也是 S 函数.

证

$$\begin{aligned} |g^{p}(y)| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right|\frac{1}{(\mathrm{i}y)^N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^N\{(-\mathrm{i}x)^p f(x)\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{|y|^N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}x^N}(x^p f(x))\right|\mathrm{d}x \\ &= O(|y|^{-N}). \end{aligned}$$

证毕.

我们还有:

定理 2.1.2　如果 $f(x) \in S$,它的 Fourier 变换为 $g(y)$,则 $f'(x)$ 的 Fourier 变换为 $\mathrm{i}g(y)$,$f(ax+b)$ 的 Fourier 变换为 $(a)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{b}{a}y\mathrm{i}}g\left(\frac{y}{a}\right)$.

证　略.

2. *S* 函数的 Hermite 展开

由于 S 函数 $f(x)$ 均属于 $L_2(-\infty,+\infty)$,故由(1.4.3)式知

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\psi_j(x), \tag{2.2.1}$$

其中　$a_j = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x.$

记

$$f_N = \sum_{j=0}^{N} a_j\psi_j(x), \tag{2.2.2}$$

则由(2.2.1)式知

$$\| f - f_N \| \to 0,\quad 当\ N \to \infty, \tag{2.2.3}$$

其中

$$\| f \| = \| f \|_{L_2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定理 2.2.1　级数(2.2.1)是一致收敛的.

证　由(2.2.2)式我们有

$$\begin{aligned} (f_N)' &= \sum_{j=0}^{N} a_j\psi'_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^{N} a_j\left[\sqrt{\frac{j}{2}}\psi_{j-1}(x) - \sqrt{\frac{j+1}{2}}\psi_{j+1}(x)\right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{N}\left(a_{j+1}\sqrt{\frac{j+1}{2}} - a_{j-1}\sqrt{\frac{j}{2}}\right)\psi_j(x)$$

$$- a_{N+1}\sqrt{\frac{N+1}{2}}\psi_N(x). \tag{2.2.4}$$

由于 $f' \in L_2$，故

$$f' = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\psi_j(x),$$

$$b_j = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi'_j(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\sqrt{\frac{j}{2}}\psi_{j-1}(x) - \sqrt{\frac{j+1}{2}}\psi_{j+1}(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{\frac{j+1}{2}}a_{j+1} - \sqrt{\frac{j}{2}}a_{j-1},$$

$$(f')_N = \sum_{j=0}^{N} b_j\psi_j(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{N}\left[\sqrt{\frac{j+1}{2}}a_{j+1} - \sqrt{\frac{j}{2}}a_{j-1}\right]\psi_j(x). \tag{2.2.5}$$

我们知

$$\|(f')_N - f'\| \to 0, \quad 当\ N \to \infty.$$

而由(2.2.4)式可得

$$(f_N)' = (f')_N - a_{N+1}\sqrt{\frac{N+1}{2}}\psi_N(x).$$

故知

$$\|f' - (f_N)'\| \leqslant \|f' - (f')_N\| + |a_{N+1}|\sqrt{\frac{N+1}{2}}. \tag{2.2.6}$$

由于

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{H}_N(y)\mathrm{d}y = \mathrm{H}_{N-1}(0) - \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{H}_{N-1}(x).$$

故有

$$a_N = \frac{1}{C_N}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{H}_N(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{C_N}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}\int_0^x \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{H}_N(y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{C_N}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{H}_{N-1}(x)$$

$$= \frac{-1}{C_N}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{H}_{N-1}(x)\cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(f'(x) + xf(x))\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{C_{N-1}}{C_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{N-1}(x)(f'(x) + xf(x))\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2N}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{N-1}(x)(f'(x) + xf(x))\mathrm{d}x.$$

故

$$|a_N|\sqrt{\frac{N+1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{N+1}{2}}}{\sqrt{2N}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{N-1}(x)(f'(x) + xf(x))\mathrm{d}x\right| \to 0.$$

同样　$|a_{N+1}|\sqrt{\frac{N+1}{2}} \to 0.$

故得

$$\|f' - (f_N)'\| \to 0, \quad 当\ N \to \infty.$$

对于任何 $f \in S$，我们有

$$|f|^2 = 2\int |ff'|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

故有

$$|f - f_N|^2 \leqslant 2\|f - f_N\| \, \|f' - (f_N)'\| \to 0.$$

定理 2.2.1 证毕.

3. *S* 函数 Fourier 积分的反演公式

今设 $f(x) \in S$，由定理 2.2.1 知

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \psi_j(x), \tag{2.2.1}$$

其中 $a_j = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x$

为一致收敛的. 因此我们由(1.5.1) 式有

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\psi_j(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j(-\mathrm{i})^j \psi_j(y). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

由定理 2.2.1 知 $g(y) \in S$，而(2.3.1) 式也是一致收敛的，故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx}\mathrm{d}y &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j(-\mathrm{i})^j \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx}\mathrm{d}y \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j(-\mathrm{i})^j \mathrm{i}^j \psi_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\psi_j(x) \\ &= f(x). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

故 $g(y)$ 的反 Fourier 变换为 $f(x)$.

现在我们设 $f(x)$，$g(x)$ 为任意二 *S* 函数，而 $F(x)$，$G(x)$ 分别为它们的 Fourier 变换，即令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n(x), \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\mathrm{i})^n\psi_n(x),$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\psi_n(x), \quad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(-\mathrm{i})^n\psi_n(x),$$

则我们有

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2, \ \|F(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(-\mathrm{i})^n|^2. \tag{2.3.3}$$

故

$$\|f(x)\|^2 = \|F(x)\|^2.$$

$$\langle f(x), \overline{g(x)}\rangle = \langle F(x), \overline{G(x)}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{b}_n, \tag{2.3.4}$$

其中 $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

(2.3.3)，(2.3.4) 式称为 Parserval 等式.

4. *S* 广义函数

定义 2.4.1 设 $f_n(x) \in S$，且对任何 $F(x) \in S$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)F(x)\mathrm{d}x \tag{2.4.1}$$

总存在，则称序列 $\{f_n(x)\}$ 为正则的.

定义 2.4.2 如果两个 *S* 函数序列所得到的(2.4.1) 相等，则称此二序列等价.

定义 2.4.3 一正则序列定义为一 *S* 广义函数 $f(x)$，二等价正则序列所定义的 *S* 广义函数相同，而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)F(x)\mathrm{d}x \text{ 定义为} \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)F(x)\mathrm{d}x,$$

对任何 $F(x)\in S$.

定义 2.4.4 如果 $f(x)$,$g(x)$ 分别由 S 函数序列 $f_n(x)$ 与 $g_n(x)$ 所确定,则其和 $f(x)+g(x)$ 由 $f_n(x)+g_n(x)$ 所确定,导数 $f'(x)$ 由 $f'_n(x)$ 所确定,$f(ax+b)$ 由 $f_n(ax+b)$ 所确定,$f(x)$ 的 Fourier 变换 $F(x)$ 由 $f_n(x)$ 的 Fourier 变换 $F_n(x)$ 所确定.

我们有如下的基本定理.

定理 2.4.1 对任何 S 广义函数 $f(x)$,

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j\psi_j(x), \tag{2.4.2}$$

其中
$$a_j=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x$$

的收敛是弱的.

为了证此定理,我们需要如下的引理.

引理 2.4.1([B4]) 设 x_n 为数列,$x_n=O(n)$(当 $n\to\infty$),并且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^m x_n$ 为绝对收敛,且当 $m\to\infty$ 时有极限,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{m\to\infty} a_n^m=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^m. \tag{2.4.3}$$

证 如果结论不成立,则对于任何 $\varepsilon>0$,有一个 N 的无穷序列存在,使

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{m\to\infty} a_n^m-\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^m\right|>\varepsilon, \tag{2.4.4}$$

这就是说

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^m>\varepsilon \tag{2.4.5}$$

或 $<-\varepsilon$,故必有 N 的一个无穷序列满足二者之一.为明确起见,假定(2.4.5)式成立.设这些 N 中的第一个是 N_1,然后用归纳法定义两个序列 N_s,M_s 如下:

设已经定义了 $N_1,\cdots,N_s$ 满足(2.4.5)式和 $M_1,\cdots,M_{s-1}$,然后选择 $M_s\geqslant M_{s-1}$,使对一切 $m\geqslant M_s$ 有

$$\sum_{n=N_s+1}^{\infty} a_n^m>\frac{1}{2}\varepsilon. \tag{2.4.6}$$

然后在满足(2.4.5)式的序列中选 $N_{s+1}>N_s$,使

$$\sum_{n=N_{s+1}+1}^{\infty} n\left|a_n^{M_s}\right|<\varepsilon, \tag{2.4.7}$$

这是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{M_s}$$

绝对收敛.然后以 x_n 表示小于 n 的 N_s 的数目,则当 $n\to\infty$ 时 $x_n=O(n)$,因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n^m=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=N_{s+1}}^{\infty} a_n^m \tag{2.4.8}$$

(由于左方为绝对收敛),令 $m=M_r$,则由(2.4.6)式,(2.4.7)式有

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{h=N_{s+1}}^{\infty} a_n^m>\sum_{s=1}^{r}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)-\varepsilon. \tag{2.4.9}$$

因此对于 $M_1,M_2,M_3,\cdots$,$\sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n^m$ 无限增大,与假设矛盾,故不可.证毕.

定理 2.4.1 之证明　设 $f(x)$ 由 S 函数正则序列 $f_n(x)$ 所确定，由于 $\psi_j(x)\in S$，知

$$a_j=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}a_j^n,$$

记 $\varphi\in S$，由定理 2.2.1 知 $\varphi(x)$ 可表为一致收敛的级数

$$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_j\psi_j(x),\tag{2.4.10}$$

其中 $b_j=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x.$

由于

$$-\psi''_j+x^2\psi_j=(2j+1)\psi_j,$$

可得

$$-\varphi''+x^2\varphi=\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)b_j\psi_j.\tag{2.4.11}$$

易知(2.4.11) 式左端属于 $L_2(-\infty,+\infty)$，故

$$\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^2b_j^2<\infty.$$

依此继续讨论，可得对任何正整数 λ 都有

$$\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{2\lambda}b_j^2<\infty,\tag{2.4.12}$$

对任何实数到 x_j，$x_j=O(j)$（当 $j\to\infty$ 时）. 我们将证明

$$\psi(x)=\sum_{j=0}^{\infty}x_jb_j\psi_j(x)$$

为一 S 函数，这只需注意到对任何 λ，由(2.4.12) 式可知

$$\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{2\lambda}x_j^2b_j^2<\infty.\tag{2.4.13}$$

因而知

$$x^{2k}\psi(x)\in L_2,\ x^{2j}\psi^{(2k)}(x)\in L_2.$$

但

$$\langle f_m,\psi(x)\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}a_j^mx_jb_j,\tag{2.4.14}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}|a_j^m||x_jb_j|\leqslant\sqrt{\sum_{j=0}^{\infty}a_j^{m^2}}\sqrt{\sum_{j=0}^{\infty}x_j^2b_j^2}$$
$$=\|f_m^2\|\ \|\psi\|,$$

即(2.4.14) 式右端为绝对收敛，且

$$\lim_{m\to\infty}\langle f_m(x),\psi(x)\rangle=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_j^mx_jb_j$$

存在，故由引理 2.4.1 知

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_j^mb_j=\sum_{j=0}^{\infty}a_jb_j=\lim_{m\to\infty}\langle f_m(x),\varphi(x)\rangle$$
$$=\langle f(x),\varphi(x)\rangle,$$

所以

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\psi_j(x).$$

定理 2.4.1 证毕.

例 2.4.1　$f(x)=\delta(x)$.

由

$$f_n(x)=\mathrm{e}^{-nx^2}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}},$$

我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)F(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx^2}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}F(x)\mathrm{d}x=F(0),$$

我们知

$$\delta(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\psi_j(x),$$

其中

$$a_j=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x=\psi_j(0),$$

故得

$$\delta(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j(0)\psi_j(x). \tag{2.4.15}$$

一个普通点函数具有某种增长限制时必为一广义函数，具体来说我们有

定理 2.4.2 设存在 $N>0$，使

$$(1+x^2)^{-N}f(x)\in L(-\infty,+\infty),$$

则必存在一串 S 函数 $f_n(x)$，使

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)F(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)F(x)\mathrm{d}x$$

对任何 $F(x)\in S$ 均成立，这就是说存在 S 广义函数 $\mathring{f}(x)$，使

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathring{f}(x)F(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)F(x)\mathrm{d}x.$$

此式左端积分为广义函数的积分，右端积分为普通的 Lebesgue 积分，因此我们可以认为函数 $f(x)$ 是一广义函数 $\mathring{f}(x)$.

证 取 $s(x)\in C_0^\infty(-1,1)$，$s(x)\geqslant 0$，$\int_{-1}^{+1}s(x)\mathrm{d}x=1$.

定义

$$f_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)s(n(t-x))n\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n^2}}\mathrm{d}t.$$

我们现在可以证明 $f_n(x)\in S$.

对任何 $M>0$，有

$$|f_n^{(p)}(x)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(-n)^p s^{(p)}\{n(t-x)\}n\mathrm{e}^{-t^2/n^2}\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant n^{p+1}\max|s^{(p)}(y)|\,\mathrm{e}^{-\frac{(|x|-1)^2}{n^2}}\{1+(|x|+1)^2\}^N$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(1+t^2)^{-N}|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$=O(|x|^{-M}),$$

此处我们用了

$$|x|-1<|t|<|x|+1.$$

当 $n\to\infty$ 时

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)F(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)F(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_{-1}^{+1}s(y)\mathrm{d}y\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-t^2/n^2}F\left(t-\frac{y}{n}\right)\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)F(x)\mathrm{d}x\right\}\right|$$

$$\leqslant\max_{|y|\leqslant 1}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-t^2/n^2}\left\{F\left(t-\frac{y}{n}\right)-F(t)\right\}\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)F(t)(1-\mathrm{e}^{-t^2/n^2})\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\left\{\frac{1}{n}\max_{|x-t|<1}|F'(x)|\right\}\mathrm{d}t$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)F(t)\frac{1+t^2}{n^2}\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\frac{A}{(1+t^2)^N}\mathrm{d}t+\frac{1}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\frac{B}{(1+t^2)^N}\mathrm{d}t\to 0,$$

其中 A 和 B 是常数，上式右端当 $n\to\infty$ 时 $\to 0$.

故定理 2.4.2 获证.

由定理 2.4.2 知普通函数 1，$|x|^{\alpha}$，$|x|^{\alpha}\log|x|$ 均为 S 广义函数，$\frac{1}{x}$ 也为广义函数，它可定义为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|x|$，下面我们可以例举其中一些的 Hermite 展开.

例 2.4.2 恒等函数 1.

我们有

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(t)\mathrm{d}t\psi_n(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{2n}(t)\mathrm{d}t\psi_{2n}(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{c_{2n}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}_{2n}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\psi_{2n}(x) \\
&= \sqrt{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c_{2n}}\mathrm{H}_{2n}(0)\psi_{2n}(x) \\
&= \sqrt{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{2n}(0)(-1)^n\psi_{2n}(x).
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

例 2.4.3 函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sgn}t\psi_{2n+1}(t)\mathrm{d}t\psi_{2n+1}(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta_{2n+1}\psi_{2n+1}(x).
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

可以证明 $\beta_{2n+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_{2n+1}(t)}{t}\mathrm{d}t.$

例 2.4.4 函数 $\frac{1}{x}$.

我们有

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}\psi_{2n+1}(x), \tag{2.4.18}$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n+1} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_{2n+1}(x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^n 2^{2n+1}n!}{c_{2n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}L_n^{\frac{1}{2}}(x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}L_n^{\frac{1}{2}}(x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}L_n^{\frac{1}{2}}(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}}{n!\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\mathrm{F}\left(-n,\frac{1}{2};\frac{3}{2};2\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)2\sqrt{2}}{n!}\int_0^1(1-2u^2)^n\mathrm{d}u \\
&= \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{n!}J_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_n &= 2\sqrt{2}\int_0^1(1-2u^2)^n\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 s^n(1-s)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s+\int_{-1}^0 s^n(1-s)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \\
&= \beta\left(n+1,\frac{1}{2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

故

$$\alpha_{2n+1} = (-1)^n \sqrt{\pi}\,\frac{(2n+1)!}{n!}\,\frac{J_n}{c_{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\psi'_{2n+1}(0)J_n. \tag{2.4.19}$$

5. S 广义函数的 Fourier 变换

我们已知任何S广义函数$f(x)$均可由其展式(2.4.2)之部分和

$$f_N = \sum_{j=0}^{N} a_j\psi_j$$

所确定. 由定义知 $f(x)$ 的 Fourier 变换必由 $\tilde{f}_N(x)$ 所确定，故由

$$\tilde{f}(x) = \lim_{N\to\infty}(\tilde{f}_N) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\tilde{\psi}_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(-\mathrm{i})^j\psi_j(x).$$

例 2.5.1 若 $f(x)=\delta(x)$，则

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j(0)\,\tilde{\psi}_j(x)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j(0)(-\mathrm{i})^j\psi_j(x)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\psi_{2j}(0)(-1)^j\psi_{2j}(x).\end{aligned}$$

由(2.4.16)式，$1 = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\psi_j(x)$.

$$b_j = \begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_j(x)\mathrm{d}x = 0,\ j = 2k+1\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_j(x)\mathrm{d}x,\ j = 2k\end{cases}$$

$$=\sqrt{2\pi}(-1)^k\psi_{2k}(0).$$

故

$$\tilde{\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

例 2.5.2 $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

由(2.4.18)式，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}\tilde{\psi}_{2n+1}(x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}(-\mathrm{i})^{2n+1}\psi_{2n+1}(x)\\ &= -\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_{2n+1}\psi_{2n+1}(x).\end{aligned}$$

由(1.1.12)式，(1.8.7)式，(1.9.11)式，我们可以推出

$$\begin{aligned}&(1-t)^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{\frac{-x^2(1+t)}{2(1-t)}\right\}\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\psi'_{2n+1}(0)\,\frac{\psi_{2n+1}(x)}{x}t^n.\end{aligned}$$

故有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\psi'_{2n+1}(0)\alpha_{2n+1}t^n = \frac{2\sqrt{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{1-t}$$

和

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\psi'_{2n+1}(0)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sgn}x\psi_{2n+1}(x)\mathrm{d}x\right)t^n\\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\frac{(1-t)^{-\frac{1}{2}}}{1+t}.\end{aligned}$$

故

$$\beta_{2n+1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sgn}x\psi_{2n+1}(x)\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^n\alpha_{2n+1}.$$

故我们有

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x)&=-\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\beta_{2n+1}\psi_{2n+1}(x)\\&=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sgn}x.\end{aligned}$$

第三章 弱函数

1. 华罗庚[21]于 1957 年提出了研究广义函数(周期)的新途径

华罗庚先生给出的广义函数的新定义如下:形如

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{3.1.1}$$

的 Fourier 级数就定义为一个广义函数,我们并不管这级数收敛与否,这广义函数以 $u(\theta)$ 表示. 令

$$v(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}. \tag{3.1.2}$$

显然对于二复数 λ,μ

$$\lambda u(\theta)+\mu v(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{3.1.3}$$

仍为一广义函数,故广义函数是一个线性集合. 如果级数 $\sum_n a_n\bar{b}_n$ 收敛,则此值称为广义函数 $u(\theta)$ 与 $v(\theta)$ 的内积,以 $(u(\theta),\overline{v(\theta)})$ 表示.

对于上述广义函数的定义,我们可以另一种形式来解释[9][10]. 考虑级数(3.1.1) 的 n 次部分和

$$f_n(x)=\sum_{j=-n}^{n}a_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}, \tag{3.1.4}$$

$$K=\{\varphi,\ \varphi=\sum_{j=-N}^{N}b_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx},\ N=0,1,2,\cdots\},\quad(3.1.5)$$

上式中 K 表示所有三角多项式的集合.

则

$$(f_n,\bar{\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_n\bar{\varphi}\,\mathrm{d}x\approx\sum_{j=-N}^{N}a_j\bar{b}_j,\qquad n>N,$$

故

$$(f_n,\bar{\varphi})\to\sum_{j=-N}^{N}a_j\bar{b}_j,\text{当 }n\to\infty.$$

也就是说,部分和 f_n 对 K 来说为弱收敛,故形式 Fourier 级数

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}$$

恒可以看作对 K 弱收敛的 Fourier 级数.

2. 在 Hilbert 空间的推广

我们可以把上述思想推广到一个抽象的 Hilbert 空间. 为简单起见,先考虑实 Hilbert 空间. 当然这里的理论也容易推到复 Hilbert 空间上.

设 H 为一个具$\langle,\rangle$内积的可分的 Hilbert 空间,则必存在一正交基底$\{\mathrm{e}_n,n=0,1,2,\cdots\}$,设

$$K=\mathrm{Span}\{\mathrm{e}_n,n=0,1,2,\cdots\},\qquad(3.2.1)$$

如果 $f\in H$,则我们有

$$f=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\mathrm{e}_j=\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}a_j\mathrm{e}_j,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_j^2<\infty,\quad a_j=\langle f,\mathrm{e}_j\rangle,\qquad(3.2.2)$$

如果

$$\sum_{j=0}^{+\infty}a_j^2=+\infty,$$

则我们有简单定理如下:

定理 3.2.1 对于任意实$\{a_j\}$,级数

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_j\mathrm{e}_j\qquad(3.2.3)$$

对于 K 恒弱收敛,其和 $f\in K'$,K' 表示 K 之线性(可加)泛函. 反之,任意 K 之线性泛函 f 必可表为对 K 弱收敛之级数(3.2.3)式.

证 取 $\varphi\in K$,

$$\varphi=\sum_{j=0}^{N}b_j\mathrm{e}_j,$$

$$\langle f_n,\varphi\rangle=\langle\sum_{j=0}^{N}a_j\mathrm{e}_j,\sum_{j=0}^{N}b_j\mathrm{e}_j\rangle$$

$$=\sum_{j=0}^{N}a_jb_j,\quad\text{对所有 }n>N.$$

故

$$\langle f_n,\varphi\rangle\to\sum_{j=0}^{N}a_jb_j,\text{当 }n\to\infty.$$

这就是说(3.2.3)式弱收敛,记其和为 f. 易知 f 为 K 之线性泛函.

反之,如果 f 为 K 之线性泛函,对于任何 $\varphi=\sum_{j=0}^{N}b_j\mathrm{e}_j$,$f(\varphi)=\sum_{j=0}^{N}b_jf(\mathrm{e}_j)$,令 $f(\mathrm{e}_j)=a_j$,我们已证$\sum_{j=0}^{\infty}a_j\mathrm{e}_j$ 为 K 之线性泛函,表之为 g,则

$$\langle g,\varphi\rangle = \langle \sum_{j=0}^{\infty} a_j \mathrm{e}_j, \sum_{j=0}^{N} b_j \mathrm{e}_j \rangle = \sum_{j=0}^{N} a_j b_j,$$

故

$$f(\varphi) = \langle g,\varphi\rangle, \text{对任何 } \varphi \in K,$$

故

$$f = g.$$

证毕.

例 3.2.1 $H = l_2, \mathrm{e}_j = (0,\cdots,1,\cdots,0)$,则

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \mathrm{e}_j = (a_0, a_1, \cdots, a_j, \cdots)$$

表所有无穷维实向量.

例 3.2.2 $\mathrm{e}_n^1 = \cos nx, \mathrm{e}_n^2 = \sin nx$,则

$$\{\mathrm{e}_n^1, \mathrm{e}_n^2, n = 0,1,\cdots\}$$

为 $L_2(0,2\pi)$ 之一正交基底,故

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

为实域中的华广义函数.

3. 实数轴情形

在应用上最重要的情形是实直线,在这种情形,我们取 $H = L_2(-\infty, +\infty)$.

在第一章已证

$$\psi_n(x) = \frac{\mathrm{H}_n(x)}{c_n} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\mathrm{H}_n(x) = \text{Hermite 多项式} = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2},$$

$$c_n^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

构成 $L_2(-\infty, +\infty)$ 的一组完全正交基.

由定理 3.2.1 知对任何实数列 $\{a_j\}$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \psi_j(x) \tag{3.3.1}$$

恒对

$$K = \mathrm{Span}\{\psi_n(x), n = 0,1,2,\cdots\}$$

为弱收敛,设其和为 $f(x)$,则属于 K',其中 K' 表示 K 之所有线性泛函.

为区别于其他广义函数,我们称它们为弱函数.

例 3.3.1 δ 函数

以下级数

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(0) \psi_j(x) \tag{3.3.2}$$

为 δ 函数 $\delta(x)$,因为

$$\langle \delta(x), \varphi\rangle = \langle \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(0)\psi_j(x), \sum_{j=0}^{N} b_j \psi_j(x)\rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{N} b_j \psi_j(0) = \varphi(0).$$

对应于(3.3.2)式我们引进其对应的幂级数

$$\delta(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(0)\psi_j(x) t^j.$$

根据 Mehler 公式,我们有

$$\delta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{1-t^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\exp\left\{-\frac{1+t^2}{2(1-t^2)}x^2\right\}. \tag{3.3.3}$$

令

$$\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{1}{2\tau},\quad (1+t^2)2\tau$$
$$=1-t^2,\quad t^2(1+2\tau)=1-2\tau,$$
$$t^2=\frac{1-2\tau}{1+2\tau},\quad 1-t^2=\frac{4\tau}{1+2\tau},$$

故

$$\delta(x,t)=\frac{\sqrt{1+2\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4\tau}\right\}$$
$$=\sqrt{1+2\tau}\left\{\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)\right\},$$

此花括号内表示正是热核. 故有

$$\delta(x,t)\longrightarrow\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0,\end{cases}\quad 当\ t\to 1\ 时.$$

例 3.3.2 如果 f 为弱函数，则 xf 亦是，其中 $xf=\sum_{j=0}^{\infty}a_j x\psi_j$.

由

$$xH_n=nH_{n-1}+\frac{H_{n+1}}{2},$$

知

$$x\psi_n=\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}.$$

故

$$xf=\sum_{j=0}^{\infty}a_j x\psi_j$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left\{\sqrt{\frac{j}{2}}\psi_{j-1}+\sqrt{\frac{j+1}{2}}\psi_{j+1}\right\}$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left[a_{j+1}\sqrt{\frac{j+1}{2}}+a_{j-1}\sqrt{\frac{j}{2}}\right]\psi_j(x), \tag{3.3.4}$$

上式右端显然属于 K'.

例 3.3.3 如果 f 为弱函数，则 f' 亦是，其中

$$f'=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\psi'_j(x).$$

我们有

$$\psi'_j=\frac{1}{c_j}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}H_j(x)\right)'$$
$$=\frac{1}{c_j}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}H_j(x)+e^{-\frac{x^2}{2}}H'_j(x)\right)$$
$$=-x\psi_j(x)+\frac{2je^{-\frac{x^2}{2}}H_{j-1}}{c_j}$$
$$=-x\psi_j(x)+\sqrt{2j}\psi_{j-1}(x), \tag{3.3.5}$$

故

$$f'=-xf+\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{2(j+1)}a_{j+1}\psi_j(x), \tag{3.3.6}$$

显然上式右端属于 K'.

例 3.3.4 测度.

设 μ 为对应于$(C_0(-\infty,+\infty))'$的有限测度，

$$\mu(\varphi)=\int_{\mathbf{R}^1}\varphi\ \mathrm{d}\mu,$$

$\mu(\varphi)$ 为 $C_0(-\infty,+\infty)$ 上的线性泛函,故

$$\mu'=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\psi_j,\qquad a_j=\int_{\mathbf{R}^1}\psi_j\mathrm{d}\mu.$$

其中 μ'称为 μ 之广义 Radon-Ni-kodyn 导数.

4. *S* 广义函数

我们有如下定理:

定理 3.4.1 弱函数

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\psi_j(x)$$

为 S 广义函数的充要条件为存在正数 N,使

$$a_j=O(j^N).$$

证 充分性.

设 $a_j=O(j^N)$,我们已知对任何 $\varphi\in S$,则

$$\varphi=\sum_{j=0}^{\infty}b_j\psi_j.$$

由定理 2.2.1,知此级数为一致收敛,由于

$$-\psi''_j+x^2\psi_j=(2j+1)\psi_j,$$

知

$$-\varphi''+x^2\varphi=\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)b_j\psi_j.$$

易知,上式右端属于 $L_2(-\infty,+\infty)$,故

$$\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^2b_j^2<+\infty.$$

依此可知对任何正整数 λ,

$$\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{2\lambda}b_j^2<+\infty.$$

令 $f_n=\sum_{j=0}^{n}a_j\psi_j$,则对 $m>n$,

$$\langle f_n,\varphi_m\rangle=\sum_{j=0}^{n}a_jb_j\longrightarrow\sum_{j=0}^{n}a_jb_j,\quad 当\ m\to\infty.$$

故(f_n,φ) 为 S 的线性泛函.

$$\langle f_n,\varphi\rangle=\sum_{j=0}^{n}a_jb_j.$$

我们取 $\lambda=N+2$,则有

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_jb_j\leqslant C\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|j|^N}{(2j+1)^{N+2}}\leqslant C\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^{\lambda}}<\infty.$$

故级数$\sum_{j=0}^{\infty}a_jb_j$ 一致收敛,而

$$\langle f_n,\varphi\rangle\to\sum_{j=0}^{\infty}a_jb_j,\ 当\ n\to+\infty\ 时.$$

故 $f_n\to f$ 对 S 为弱收敛,由第二章知 f 为广义函数,即 $f\in S$.

必要性.

设 f 为 S 广义函数,则对任何 $\varphi\in S$,

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}a_jb_j.$$

如果 N 不存在,则存在一串 $j_1,\cdots,j_r,\cdots$,使对这些 j_r,我们有

$$|a_{j_r}|>j_r^r.$$

今取 $b_j=0$,如果 $j\neq j_r$,$b_j=a_j^{-1}$,如果 $j=j_r$ 容易看出,$g=\sum_{j=0}^{\infty}b_j\psi_j$ 属于 S,但

$$\langle f,g\rangle = \sum_{r=0}^{\infty} a_{j_r} b_{j_r} = +\infty,$$

这与 $f\in S'$ 矛盾,故存在 N 使 $a_j = O(j^N)$.

5. 高维情形

所有上面的讨论,可以推广到高维情形.

我们考虑

$H = L^2(\mathbf{R}^n)$,

令 $j=(j_1,\cdots,j_n)$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$,

$$\Psi_j(x) = \psi_{j_1}(x_1)\cdots\psi_{j_n}(x_n).$$

容易看出,$\Psi_j(x)$ 构成 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一组完整正交基,故

$$K = \mathrm{Span}\{\Psi_j(x)\} \tag{3.5.1}$$

上的线性泛函可表示为

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Psi_j, \qquad a_j = f(\Psi_j). \tag{3.5.2}$$

我们注意到

$$-\Delta\Psi_j + x^2\Psi_j = (2\mid j\mid + n)\Psi_j,\ \mid j\mid = j_1+\cdots+j_n, \tag{3.5.3}$$

故可以考虑 n 维椭圆型方程

$$-\Delta u + x^2 u = f. \tag{3.5.4}$$

如果 f 为 K 上的线性泛函,例如为一测度 μ,则我们可找到方程(3.5.4)式在整个 $\mathbf{R}^n$ 上的广义解为

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j\Psi_j}{(2\mid j\mid + n)},\ \mid j\mid = j_1+\cdots+j_n. \tag{3.5.5}$$

广义解可定义为

$$\int u(-\Delta\varphi'' + x^2\varphi)\mathrm{d}x = f(\varphi), \quad \varphi\in K.$$

如果

$$f = \delta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j(0)\Psi(x), \tag{3.5.6}$$

则我们可得上述 Hermite 椭圆型方程(3.5.4)式的基本解为

$$E(x,0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Psi_j(0)}{(2\mid j\mid + n)}\Psi(x). \tag{3.5.7}$$

6. 华类 *H*

如果弱函数

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_n\psi_n(x)$$

的系数满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mid a_n\mid^{\frac{1}{n}} \leqslant 1, \tag{3.6.1}$$

则我们称 $f(x)$ 的集合为华类 H.

此对应在单位圆情形,华罗庚定义的广义函数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{nix}$$

的系数满足

$$\lim_{|n|\to\infty} \mid a_n\mid^{\frac{1}{n}} \leqslant 1. \tag{3.6.2}$$

这时所对应的 $z,\bar{z}$ 的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \tag{3.6.3}$$

为 $\mid z\mid < 1$ 内的调和函数,且 Fourier 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{ni\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} e^{-ni\theta}$$

可看作调和函数(3.6.3)式的边值.

同样

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) \tag{3.6.4}$$

可看作方程

$$u_t - u_{xx} = -x^2 u, \quad t > 0 \tag{3.6.5}$$

的解

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-(2n+1)t} \psi_n(x), \quad t > 0 \tag{3.6.6}$$

的初值 $u(x,0) = f(x)$.

我们注意级数(3.6.6)式在条件(3.6.1)式下对 $t>0$ 的任何有界域内是一致收敛的. 且其对 t, 对 x 的微商也是一致收敛的. 因此在 $t>0$, 它的确是方程(3.6.5)式的经典解.

如果 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \psi_n(y) \mathrm{d}y,$$

故由 Mebler 公式,(3.6.6)式变为

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y) \psi_n(x) \mathrm{e}^{-2nt} \mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{e}^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y, \mathrm{e}^{-2t}) f(y) \mathrm{d}y, \tag{3.6.7}$$

此处

$$K(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left\{\frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right\},$$

$$0 < t < 1. \tag{3.6.8}$$

对非齐次 Bergers 方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \mu u_{xx} + 4x, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.6.9}$$

的解,作 Cole 变换

$$\varphi(x,t) = \exp\left\{-\frac{1}{2\mu}\int_0^x u(x,t)\mathrm{d}x\right\}, \tag{3.6.10}$$

就得到

$$\begin{cases} \varphi_t - \mu\varphi_{xx} = \dfrac{-x^2}{\mu}\varphi, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) = \exp\left\{-\dfrac{1}{2\mu}\displaystyle\int_0^x u_0(x)\mathrm{d}x\right\}, \end{cases} \tag{3.6.11}$$

再作变换

$$x = \sqrt{\mu} x', \ \varphi(x,t) = \varphi(\sqrt{\mu}x', t) = \psi(x', t),$$

则

$$\begin{cases} \psi_t - \psi_{x'x'} = -x'^2 \psi, \\ \psi(x', 0) = \varphi_0(\sqrt{\mu}x) = \psi_0(x'). \end{cases} \tag{3.6.12}$$

由(3.6.7)式知

$$\psi(x',t) = \mathrm{e}^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x', y', \mathrm{e}^{-2t}) \psi_0(y') \mathrm{d}y'$$

$$= \mathrm{e}^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{x}{\sqrt{\mu}}, \frac{y}{\sqrt{\mu}}, \mathrm{e}^{-2t}\right) \frac{\varphi_0(y)}{\sqrt{\mu}} \mathrm{d}y.$$

因此

$$\varphi(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t'^2)}} \exp \frac{1}{\mu}\left\{\frac{x^2-y^2}{2}\right.$$

$$-\frac{(x-yt')^2}{1-t'^2}\Bigg\}\varphi_0(y)\mathrm{d}y, \quad 0<t'<1, t'=\mathrm{e}^{-2t}. \tag{3.6.13}$$

令

$$F(x,y,t') = -\left[x^2-y^2-\frac{2(x-yt')^2}{1-t'^2}\right]+\int_0^y u_0(y)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1+t'^2}{1-t'^2}(x^2+y^2)-\frac{4xyt'}{1-t'^2}+\int_0^y u_0(y)\mathrm{d}y,$$

得

$$\varphi(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{\pi\mu(1-t'^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\mu}F(x,y,t')\right\}\mathrm{d}y.$$

我们注意到

$$F_x = 2\left(\frac{1+t'^2}{1-t'^2}x-\frac{2yt'}{1-t'^2}\right),$$

故 Cauchy 问题(3.6.9)式的解

$$=-2\mu\frac{\varphi_x}{\varphi}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}F_x(x,y,t')\exp\left\{-\frac{1}{2\mu}F(x,y,t')\right\}\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\mu}F(x,y,t')\right\}\mathrm{d}y}$$
$$=\frac{2\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1+t'^2}{1-t'^2}x-\frac{2xyt'}{1-t'^2}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\mu}F(x,y,t')\right\}\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\mu}F(x,y,t')\mathrm{d}y\right\}}. \tag{3.6.14}$$

利用此公式,我们可以证明[6] 当 $\mu\to 0$ 时,趋于方程

$$u_t+uu_x=4x$$

的可以具间断的广义解.

7. 弱函数的 Fourier 变换和 Mellin 变换

对于任何弱函数

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\psi_j(x), \tag{3.7.1}$$

由于 S 广义函数 Fourier 变换的启示,我们可以定义其 Fourier 变换 $\widetilde{f}(x)$ 为

$$\widetilde{f}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\widetilde{\psi}_j(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(-\mathrm{i})^j\psi_j(x), \tag{3.7.2}$$

其反 Fourier 变换

$$\overline{f}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\overline{\psi_j}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(+\mathrm{i})^j\psi_j(x). \tag{3.7.3}$$

这样我们就知道对于任一弱函数,其 Fourier 变换和反 Fourier 变换均为弱函数.

冯康[20] 曾经研究过 Schwartz 意义下分布的 Mellin 变换,在这里我们研究弱函数的 Mellin 变换.

经典的对连续函数 $f(x)$ 的 Mellin 变换 $M(f(x))$ 定义为

$$F(s)=M(f(x))=\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x, \tag{3.7.4}$$

其反变换为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(s)x^{-s}\mathrm{d}s. \tag{3.7.5}$$

作变换 $x=\mathrm{e}^{\xi}$,我们就得到

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\sigma\xi}f(\mathrm{e}^{\xi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\mathrm{d}\xi. \tag{3.7.6}$$

$$s=r+\mathrm{i}t.$$

定义弱函数的 Mellin 变换，我们有下列四种推广：

情形 A $e^{\sigma\xi}f(e^{\xi})$ 为 ξ 的弱函数，即

$$e^{\sigma\xi}f(e^{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n(\xi). \tag{3.7.7}$$

在这种情形，

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, i^n\sqrt{2\pi}\psi_n(t). \tag{3.7.8}$$

如果存在 $M>0$，使

$$a_n = O(n^M),$$

则 $e^{\sigma\xi}f(e^{\xi})$ 为 S 广义函数，$F(s)$ 亦是.

情形 B

$$f(e^{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n(\xi). \tag{3.7.9}$$

此时我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t}e^{\sigma\xi}\psi_n(\xi)d\xi = \sqrt{2\pi}(i)^n\psi_n(t-i\sigma),$$

故

$$F(s) = \sqrt{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, i^n\psi_n(t-i\sigma). \tag{3.7.10}$$

故由 Parseval 公式，我们知 $\{\psi_n(t-i\sigma), n=0,1,2\cdots\}$ 在虚部为 $-\sigma$ 的直线 L 上形成 $L_2(L)$ 一组完全正交基，故 $F(s) \in K'$（K 之线性泛函集），其中

$$K = \mathrm{Span}\{\psi_n(t-i\sigma), n=0,1,2,\cdots, 0<\sigma<1\}.$$

情形 C 我们知道 $x^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg x)$ 构成 $L_2(0,\infty)$ 的一组完全正交基，故如果

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg x), \tag{3.7.11}$$

即

$$f(x)\in K', K = \mathrm{Span}\{x^{\frac{1}{2}}\psi_n(\lg x), n=0,1,2,\cdots\},$$

则

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^{\infty} x^{s-\frac{1}{2}-1}\psi_n(\lg x)dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}e^{(\sigma-\frac{1}{2})\xi}\psi_n(\xi)d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\sqrt{2\pi}i^n\psi_n\left(t-i\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\right), \end{aligned} \tag{3.7.12}$$

此时

$$F(s)\in \overline{K}',$$

其中

$$\overline{K} = \mathrm{Span}\left\{\psi_n\left(t-i\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\right), n=0,1,2,\cdots\right\}.$$

情形 D 我们知 Laguerre 多项式

$$\begin{aligned} L_n^{\alpha}(x) &= \frac{e^x}{n!}x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}) \\ &= \sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-m}\frac{(-x)^m}{m!} \\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}, n=0,1,2,\cdots \end{aligned}$$

构成的

$$\varphi_n(x) = \left\{\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right\}^{\frac{1}{2}} L_n^{\alpha}(x)x^{\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{x}{2}}, n=0,1,2,\cdots \tag{3.7.13}$$

为 $L_2(0,\infty)$ 的一组完全正交组.

如果

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x), \tag{3.7.14}$$

即 $f(x)\in K'$,其中

$$K=\mathrm{Span}\{\varphi_n(x),n=0,1,2,\cdots\}, \tag{3.7.15}$$

则

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}x^{s-1}\varphi_n(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left\{\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\infty}x^{s-1}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^k\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left\{\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)k!(n-k)!}\\&\quad\cdot\int_0^{\infty}x^{s-1+\frac{\alpha}{2}+k}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[n!\Gamma(n+\alpha+1)]^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^{s+\frac{\alpha}{2}+k}}{\Gamma(k+\alpha+1)k!(n-k)!}\\&\quad\cdot\Gamma\left(s+\frac{\alpha}{2}+k\right).\end{aligned} \tag{3.7.16}$$

如果记

$$\tilde{\varphi}_n(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}\psi_n(x)\mathrm{d}x, \tag{3.7.17}$$

则有

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\tilde{\varphi}_n(s). \tag{3.7.18}$$

由 Mellin 变换的 Parseval 等式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tilde{\varphi}_n(s)\,\tilde{\varphi}_m(1-s)\mathrm{d}s=\int_0^{\infty}\varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x=\delta_{n,m},$$

则我们知

$$F(s)\in K',$$

其中

$$K=\mathrm{Span}\{\tilde{\varphi}_n(1-s),n=0,1,2,\cdots\}. \tag{3.7.19}$$

8. Mobius 反演公式

陈难先等导出了如下的 Mobius 反演公式:

在某些限制下,如果

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f(kx),\quad x>0, \tag{3.8.1}$$

则必有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}g(kx)\mu(k). \tag{3.8.2}$$

我们将要把它推广到弱函数情形.

设

$$\mathrm{e}^{\sigma\xi}f(\mathrm{e}^{\xi})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(\xi), \tag{3.8.3}$$

则

$$f(\mathrm{e}^{\xi})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-\sigma\xi}\psi_n(\xi),$$

$$\langle f(\mathrm{e}^{\xi}),\mathrm{e}^{\sigma\xi}\psi_j(\xi)\rangle=a_j.$$

我们采用情形 A 的 Mellin 变换,并用 $F(\varphi(\xi))$, $F^{-1}(\varphi(\xi))$ 表示 $\varphi(\xi)$ 的 Fourier 变换和逆 Fourier 变换,则有

$$Mf(x) = F^{-1}(e^{\sigma\xi}f(e^{\xi}))(t) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nF^{-1}(\psi_n(\xi))(t). \tag{3.8.4}$$

记 $f(x)$ 的 N 次部分和为

$$f_N(x) = \sum_{j=0}^{N}a_jx^{-\sigma}\psi_j(\lg x), \tag{3.8.5}$$

则

$$x^{\sigma}f_N(kx) = k^{-\sigma}\sum_{n=0}^{N}a_n\psi_n(\lg x + \lg k),$$

故

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}x^{s-1}f_N(kx)\mathrm{d}x\\&= \int_{-\infty}^{+\infty}e^{\sigma\xi}f_N(e^{\lg x+\lg k})e^{it\xi}\mathrm{d}\xi\\&= k^{-\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n\psi_n(\xi+\lg k)e^{it\xi}\mathrm{d}\xi\\&= k^{-s}\sum_{n=0}^{N}a_n\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(\xi)e^{it\xi}\mathrm{d}\xi\\&= k^{-s}\sum_{n=0}^{N}a_nF^{-1}(\psi_n(\xi))(t).\end{aligned} \tag{3.8.6}$$

如令

$$\rho_n(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}k^{-\sigma}\psi_n(\xi+\lg k)e^{-\sigma t}, \tag{3.8.7}$$

由于

$$|\psi_n(\xi+\lg k)| \leqslant C(n), \quad \sigma > 1.$$

故(3.8.7)式右端对 ξ 是一致收敛的,故

$$\int_0^{\infty}x^{s-1}\sum_{n=0}^{N}a_n\rho_n(\lg x)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\zeta(s)\sum_{n=0}^{N}a_nF^{-1}(\psi_n(\xi))(t),$$

此即

$$F^{-1}(e^{\sigma\xi}\sum_{n=0}^{N}a_n\rho_n(\xi))(t) = \zeta(s)\sum_{n=0}^{N}a_nF^{-1}(\psi_n(\xi))(t). \tag{3.8.8}$$

令

$$g_N(x) = \sum_{k=1}^{\infty}f_N(kx), \tag{3.8.9}$$

我们有

$$\begin{aligned}&F^{-1}(e^{\sigma\xi}g_N(e^{\xi}))(t)\\&= \zeta(s)\sum_{n=0}^{N}a_nF^{-1}(\psi_n(\xi))(t),\end{aligned} \tag{3.8.10}$$

如 $N > j$,则有

$$\langle F^{-1}(e^{\sigma\xi}g_N(e^{\xi}))(t), F^{-1}(\psi_j(\xi))(t)\rangle = a_j,$$

$$\langle e^{\sigma\xi}g_N(e^{\xi}), F^{-1}\left(\frac{(\mathrm{i})^j\psi_j(t)}{\zeta(s)}\right)\rangle = a_j. \tag{3.8.11}$$

因此

$$g(e^{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\rho_n(\xi) \in \overline{K}',$$

其中

$$\overline{K} = \mathrm{Span}\left\{e^{\sigma\xi}F^{-1}\left(\frac{\mathrm{i}^j\psi_j(t)}{\zeta(s)}\right),\ j = 0,1,2,\cdots\right\}.$$

我们注意到

$$|\zeta(s)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k^s}\right| = \zeta(\alpha),\ \alpha > 1,$$

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^s}\right| \leqslant \zeta(\alpha),$$

且所有元素

$$e^{\sigma\xi}F^{-1}\left(\frac{i^j\psi_j(t)}{\zeta(s)}\right)(\xi),\ j = 0,1,2,\cdots$$

为线性独立. 由(3.8.10)式,有

$$\int_0^{\infty} x^{s-1}g_N(x)\mathrm{d}x = \zeta(s)\int_0^{\infty} x^{s-1}f_N(x)\mathrm{d}x. \quad (3.8.12)$$

由弱函数 Fourier 变换的定义知

$$M(g(x)) = \lim_{N\to\infty} M(g_N(x)), \quad (3.8.13)$$

$$F^{-1}(e^{\sigma\xi}g(e^{\xi}))(t) = \zeta(s)\sum_{n=0}^{\infty} a_n F^{-1}(\psi_n(\xi))(t)$$
$$= \zeta(s)M(f(x)). \quad (3.8.14)$$

注意(3.8.13)式极限的意义是指

$$\langle F^{-1}(e^{\sigma\xi}g(e^{\xi})), \frac{F^{-1}(\psi_j(\xi))(t)}{\zeta(s)}\rangle$$
$$= \langle F^{-1}(e^{\sigma\xi}g_N(e^{\xi})), \frac{F^{-1}(\psi_j(\xi))(t)}{\zeta(s)}\rangle = a_j,$$

当 $N > j$.

在(3.8.14)式中,取 $f(x) = x^{-\sigma}\psi_n(\lg x)$,得到

$$g(x) = \rho_n(\lg x),$$

故有

$$\int_0^{\infty}\rho_n(\lg x)x^{s-1}\mathrm{d}x = \zeta(s)F^{-1}(\psi_n(\zeta))(t). \quad (3.8.15)$$

容易证明

$$\psi_n(\xi) = O(e^{-\alpha\xi}),\text{当 } |\xi| \to \infty, \alpha > \sigma > 1.$$

故也有

$$\rho_n(\xi) = O(e^{-\alpha|\xi|}). \quad (3.8.16)$$

故

$$F^{-1}(\psi_n(\xi))(t) = \frac{1}{\zeta(s)}\int_0^{\infty}\rho_n(\lg x)x^{s-1}\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\int_0^{\infty}\rho_n(\lg x)\left(\frac{x}{k}\right)^s\frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\int_0^{\infty}\rho_n(\lg ky)y^{s-1}\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\rho_n(\lg ky)y^{s-1}\mathrm{d}y.$$

但

$$F^{-1}(\psi_n(\xi))(t) = \int_0^{\infty} x^{s-1}[\psi_n(\lg x)x^{-\sigma}]\mathrm{d}x,$$

则由 Mellin 逆变换知

$$x^{-\sigma}\psi_n(\lg x) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\rho_n(\lg kx).$$

由此得到

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)g_N(kx). \quad (3.8.17)$$

故

$$e^{\sigma\xi}f_N(e^{\xi}) = \sum_{j=0}^{N} a_j\psi_j(\xi)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\sum_{n=0}^{N} a_n\rho_n(\lg kx)e^{\sigma\xi}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=1}^{\infty} \rho_n(\lg kx)\mu(k)e^{\sigma\xi}.$$

故

$$\begin{aligned}
&\langle e^{\sigma\xi} f_N(e^{\xi}), \psi_j(\xi)\rangle \\
&= a_j \\
&= \langle \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=1}^{\infty} \rho_n(\lg kx)\mu(k)e^{\sigma\xi}, \psi_j(\xi)\rangle \\
&= \langle \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n\rho_n(\xi+\lg k)e^{\sigma\xi}, \mu(k)\psi_j(\xi)\rangle \\
&= \langle \sum_{n=0}^{N} a_n\rho_n(\xi), \sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\psi_j(\xi-\lg k)e^{(\xi-\lg k)\sigma}\rangle \\
&= \langle g_N(e^{\xi}), e^{\sigma\xi}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\psi_j(\xi-\lg k)k^{-\sigma}\rangle. \qquad (3.8.18)
\end{aligned}$$

这是由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\psi_j(\xi-\lg k)k^{-\sigma}$$

对 ξ 而言为一致收敛.

故

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho_n(\lg x) \in K'_1, \qquad (3.8.19)$$

其中

$$K_1 = \mathrm{Span}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\psi_j(\xi-\lg k)e^{\sigma\xi}k^{-\sigma}, j=0,1,2,\cdots\Big\}.$$

在下面我们将假定 $a_j = O(j^p)$，p 为某正整数，这就是说 $e^{\sigma\xi}f(e^{\xi}) \in S'$，此时对任何 $\varphi \in S$，和(3.8.18)一样，我们有

$$\langle e^{\sigma\xi} f_N, \varphi\rangle = \langle e^{\sigma\xi} g_N, \sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\varphi(\xi-\lg k)k^{-\sigma}\rangle$$

$$= \sum_{j=0}^{N} a_j b_j.$$

故

$$\langle e^{\sigma\xi} f, \varphi\rangle = \langle e^{\sigma\xi} g, \sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\varphi(\xi-\lg k)k^{-\sigma}\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j, \qquad (3.8.20)$$

其中

$$\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\psi_j(\xi).$$

对任何 $\varphi \in S$，我们有

$$F\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\varphi(\xi-\lg k)k^{-\sigma}\Big) = \frac{1}{\zeta(s)}F(\varphi(t)) \in S,$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\varphi(\xi-\lg k)k^{-\sigma} \in S.$$

反之亦然. 由(3.8.20)式容易看出，$e^{\sigma\xi}f(e^{\xi}), e^{\sigma\xi}g(e^{\xi}) \in S'$，故

$$a_j = \langle e^{\sigma\xi} f, \psi_j\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle e^{\sigma\xi}, \mu(k)\psi_j(\xi-\lg k)k^{-\sigma}\rangle.$$

由于 $e^{\sigma\xi}g$ 对 S 为连续，故

$$a_j = \langle e^{\sigma\xi} f, \psi_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)g(\xi+\lg k)e^{\sigma\xi}, \psi_j\rangle,$$

故对于 $e^{\sigma\xi}f \in S'$，最后我们有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)g(kx). \qquad (3.8.21)$$

9. Münts 公式

Münts 公式是 Riemann zeta 函数论[B7]的一个基本公

式，他取如下的形式：

$$\zeta(s)\int_0^{\infty} y^{s-1} f(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\infty} x^{s-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} f(kx) - \frac{1}{x}\int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}x, \qquad (3.9.1)$$

其中 $s=\sigma+\mathrm{i}t, 0<\sigma<1, f(x), f'(x)$ 在任何有限区间 $[0,A)$ 上为连续，且当 $x\to+\infty$ 时，为 $O(x^{\alpha}), O(x^{\beta}), 1<\sigma<\alpha, 1<\beta$.

上述公式(3.9.1)我们可以稍作推广，使之成为如下形式：

引理 3.9.1 对 $f(x)$ 作同上之假定，则我们有推广的 Münts 公式

$$\zeta(s,a)\int_0^{\infty} x^{s-1} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\infty} x^{s-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f((k+a)x) - \frac{1}{x}\int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}x,$$

$$0<\sigma<1, \qquad (3.9.2)$$

其中 $\zeta(s,a)$ 当 $\sigma>1$ 时有如下的函数解析拓展：

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, a>0, \sigma>1.$$

证 当 $\alpha>\sigma>1$ 时和[B7]一样容易得到

$$\zeta(s,a)\int_0^{\infty} x^{s-1} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^{s-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f((k+a)x)\right)\mathrm{d}x.$$

由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} f((k+a)x) - \int_0^{\infty} f((u+a)x)\mathrm{d}u$$

$$= x\int_0^{\infty} f'((u+a)x)(u-[u])\mathrm{d}u$$

$$= x\int_0^{\frac{1}{x}} O(1)\mathrm{d}x + x\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} O(((u+a)x)^{-\beta})\mathrm{d}x$$

$$= O(1). \qquad (3.9.3)$$

故当 $x\to 0$ 时

$$\sum_{k=1}^{\infty} f((k+a)x)$$

$$= \int_0^{\infty} f(ux)\mathrm{d}u + \int_0^{\infty} f((u+a)x)\mathrm{d}u - \int_0^{\infty} f(ux)\mathrm{d}u + O(1)$$

$$= \int_a^{\infty} f(ux)\mathrm{d}u - \int_0^{\infty} f(ux)\mathrm{d}u + \frac{c}{x} + O(1)$$

$$= -\int_0^{a} f(ux)\mathrm{d}u + \frac{c}{x} + O(1),$$

其中

$$c = \int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v.$$

故

$$\int_0^{\infty} x^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty} f((k+a)x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{1} x^{s-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} f((k+a)x) - \frac{c}{x}\right\}\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{c}{s-1}\int_1^{\infty} x^{s-1}\sum_{k=0}^{\infty} f((k+a)x)\mathrm{d}x,$$

但右端当 $\alpha>0$ 时为正规，由于 $\sigma>1$，我们有

$$\frac{c}{s-1} = -c\int_1^{\infty} x^{s-2}\mathrm{d}x.$$

故有(3.9.2)式.

容易看出，我们有如下的推论：

推论 3.9.1 （Münts 公式的修改形式）

$$[\zeta(s,a)-\zeta(s,a')]\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx$$
$$=\int_0^\infty x^{s-1}\{\sum_{k=0}^\infty f((k+a)x)-\sum_{k=0}^\infty f((k+a')x)\}dx. \tag{3.9.4}$$

由(3.9.3)式我们容易得到如下的定理：

定理 3.9.1

$$\zeta(s,a)=s\int_0^\infty\frac{[u]-u}{(u+a)^{s+1}}du+\frac{a^{-s+1}}{s+1}+a^{-s},$$
$$0<\sigma<1. \tag{3.9.5}$$

证 从

$$\zeta(s,a)\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx$$
$$=\int_0^\infty x^{s-1}(\sum_{k=1}^\infty f'((k+a)x)-x^{-1}c+f(ax))dx$$
$$=\int_0^\infty x^{s-1}\Big\{x\int_0^\infty f'((u+a)x)(u-[u])du$$
$$+\int_0^\infty f((u+a)x)du-x^{-1}c+f(ax)\Big\}dx$$
$$=\int_0^\infty(u-[u])du\int_0^\infty x^s f'((u+a)x)dx$$
$$-\int_0^\infty x^{s-2}dx\int_0^{ax}f(v)dv+a^{-s}\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx$$
$$=\int_0^\infty(u-[u])du(u+a)^{-s-1}\int_0^\infty v^s f'(v)dv$$

$$-\int_0^\infty f(v)dv\int_{\frac{v}{a}}^\infty x^{s-2}dx+a^{-s}\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx$$
$$=\int_0^\infty\frac{u-[u]}{(u+a)^{s+1}}du\int_0^\infty(-s)v^{s-1}f(v)dv$$
$$+\int_0^\infty f(v)(\frac{v}{a})^{s-1}\frac{dv}{s-1}+a^{-s}\int_0^\infty v^{s-1}f(v)dv$$
$$=s\int_0^m\frac{[u]-u}{(u+a)^{s+1}}du\int_0^\infty v^{s-1}f(v)dv+\frac{a^{-s+1}}{s-1}\int_0^\infty f(v)v^{s-1}dv$$
$$+a^{-s}\int_0^\infty v^{s-1}f(v)dv.$$

故我们得(3.9.5)式.

推论 3.9.2 $\zeta(s,a)=O(|s|)$，当 $0<\sigma<1$. (3.9.6)

证明略.

今设

$$e^{\sigma\xi}f(e^\xi)=\sum_{n=0}^\infty a_n\psi_n(\xi),$$
$$e^{\sigma\xi}f_N(e^\xi)=\sum_{n=0}^N a_n\psi_n(\xi),$$
$$g_N(x)=\sum_{k=0}^\infty[f_N((k+a)x)-f_N((k+a')x)]$$
$$=\sum_{k=0}^\infty\sum_{n=0}^N a_n[((k+a)x)^{-\sigma}\psi_n(\lg(k+a)x)$$
$$-((k+a')x)^{-\sigma}\psi_n(\lg(k+a')x)]$$
$$=x^{-\sigma}\sum_{n=0}^N a_n\sum_{k=0}^\infty[(k+a)^{-\sigma}\psi_n(\lg x+\lg(k+a))$$
$$-(k+a')^{-\sigma}\psi_n(\lg x+\lg(k+a'))]$$

$$= x^{-\sigma}\sum_{n=0}^{N}a_n\rho_n(\lg x),$$

其中

$$\rho_n(\lg x) = \sum_{k=0}^{\infty}[(k+a)^{-\sigma}\psi_n(\lg x+\lg(k+a)) - (k+a')^{-\sigma}\psi_n(\lg x+\lg(k+a'))].$$

由(3.9.4)式，有

$$[\zeta(s,a)-\zeta(s,a')]\int_0^{\infty}x^{s-1}f_N(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}x^{s-1}g_N(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$[\zeta(s,a)-\zeta(s,a')]\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t}\mathrm{e}^{\sigma\xi}f_N(\mathrm{e}^{\xi})\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\mathrm{e}^{\sigma\xi}g_N(\mathrm{e}^{\xi})\mathrm{d}\xi. \tag{3.9.7}$$

在 S' 内，我们有

$$\mathrm{e}^{\sigma\xi}f_N(\mathrm{e}^{\xi}) \xrightarrow{\text{弱}} \mathrm{e}^{\sigma\xi}f(\mathrm{e}^{\xi}),$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\mathrm{e}^{\sigma\xi}f_N(\mathrm{e}^{\xi})\mathrm{d}\xi$ 对 t 来说在 S' 内弱收敛. 因此对 $0<\sigma<1$，由(3.9.6)式知(3.9.7)式之左边弱收敛到

$$[\zeta(s,a)-\zeta(s,a')]\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t}f(\mathrm{e}^{\xi})\mathrm{d}\xi.$$

故其右端亦在 S' 内弱收敛，故

$$\mathrm{e}^{\sigma\xi}g_N(\mathrm{e}^{\xi}) = \sum_{n=0}^{N}a_n\rho_n(\xi)$$

对 ξ 在 S' 内弱收敛，故

$$g_N(\mathrm{e}^{\xi}) = \mathrm{e}^{-\sigma\xi}\sum_{n=0}^{N}a_n\rho_n(\xi)$$

对 $\mathrm{e}^{-\sigma\xi}S$ 为弱收敛，我们令其极限为

$$g(\mathrm{e}^{\xi}) = \mathrm{e}^{-\sigma\xi}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\rho_n(\xi). \tag{3.9.8}$$

最后我们有：

定理 3.9.2 在上面的假设下，我们有

$$[\zeta(s,a)-\zeta(s,a')]\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}x^{s-1}g(x)\mathrm{d}x. \tag{3.9.9}$$

例 3.9.1 如果我们取

$$\mathrm{e}^{\sigma\xi}f(\mathrm{e}^{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(\xi_0)\psi_n(\xi) = \delta(\xi-\xi_0),$$

$$a_n = \psi_n(\xi_0),$$

则我们有

$$[\zeta(s,a)-\zeta(s,a')]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t}\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(\xi_0)\rho_n(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{3.9.10}$$

10. Müntz 公式的进一步研究

在这一节我们对 Müntz 公式作另一种推广. 我们取 $L_2(0,\infty)$ 的另一组正交系

$$\{x^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg x), n=0,1,2,\cdots\}.$$

设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg x) = x^{-\frac{1}{2}}h(x), \tag{3.10.1}$$

其中级数对于

$$K=\left\{\sum_{n=0}^{N}b_nx^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg x),N=0,1,2,\cdots\right\}$$

为弱收敛.

我们可定义 $f(x)$ 的 Mellin 变换为

$$\begin{aligned}Mf(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nMx^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg x)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}x^{s-\frac{1}{2}-1}\psi_n(\lg x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\xi(s-\frac{1}{2})}\psi_n(\xi)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}\tag{3.10.2}$$

定理 3.10.1 设 $\varphi(x)\in S,c>0$,对任何 q 及 $\varepsilon>0$,存在 $c_1>0$ 使

$$|D^q\varphi(x)|<c_1\mathrm{e}^{-2\pi(c-\varepsilon)|x|},\tag{3.10.3}$$

则其 Fourier 变换

$$\tilde{\varphi}(s)=\tilde{\varphi}(\sigma+\mathrm{i}t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

存在且在 $|t|<c$ 内解析,且对 $|t|<c$ 内任何 $t,\psi(\sigma+\mathrm{i}t)\in S[\sigma]$.

反之,设 $\psi(s)=\psi(\sigma+\mathrm{i}t)$ 在 $|t|<c$ 内解析,$\psi(\sigma+\mathrm{i}t)\in S[\sigma]$,则存在 $\varphi(x)\in S,\psi(s)=\widetilde{\varphi(x)}(s)$ 对任何 q、$\varepsilon>0,c_1$ 使(3.10.3) 式成立.

证 设 $K(c)$ 表示所有适合(3.10.3) 式的 S 函数,$Z(s)$ 表示 $K(c)$ 的 Fourier 变换,$K'(c),Z'(c)$ 分别表示其共轭空间. 即 $K'(c)$ 表示所有 $K(c)$ 函数关于 $K(c)$ 函数的弱极限,$Z'(c)$ 表示所有 $Z(c)$ 函数关于 $Z(c)$ 的弱极限.

下面我们将把 Münts 公式推广到 $K'(c)$ 上去.

今设

$$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}h(x),h(\mathrm{e}^{\xi})\in K(c),$$

故

$$\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(t-\mathrm{i}(\sigma-\frac{1}{2}))}h(\mathrm{e}^{\xi})\mathrm{d}\xi\in Z(c),$$

$$|\zeta(s,a_1)-\zeta(s,a_2)|=O(|t|),当 t\to+\infty.$$

故

$$[\zeta(s,a_1)-\zeta(s,a_2)]\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x\in Z(c),$$

$$f_N(\mathrm{e}^{\xi})=\sum_{n=0}^{N}a_n\psi_n(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{2}}h_N(\mathrm{e}^{\xi}),$$

因此有

$$\begin{aligned}&(\zeta(s,a_1)-\zeta(s,a_2))\int_0^{\infty}x^{s-1}f_N(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}x^{s-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}f_N((k+a_1)x)-\sum_{k=0}^{\infty}f_N((k+a_2)x)\right)\mathrm{d}x,\\&\sigma>0.\end{aligned}\tag{3.10.4}$$

令

$$\begin{aligned}g_N(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}[f_N((k+a_1)x)-f_N((k+a_2)x)]\\&=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N}a_n\sum_{k=0}^{\infty}[(k+a_1)^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg(k+a_1)x)\\&\quad-(k+a_2)^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg(k+a_2)x)]\\&=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{N}a_n\rho_n(x)=x^{-\frac{1}{2}}j_n(x),\end{aligned}$$

容易证明

$$j_N(\mathrm{e}^\xi) \in K(c),\ c = \frac{1}{2}.$$

故我们有

$$(\zeta(s,a_1) - \zeta(s,a_2))\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} h_N(\mathrm{e}^\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} j_N(\mathrm{e}^\xi)\mathrm{d}\xi.$$

现在我们设 $h(\mathrm{e}^\xi) \in K'(c)$, $h(\mathrm{e}^\xi)$ 为 $h_N(\mathrm{e}^\xi)$ 对于 $K\left(\frac{1}{2}\right)$的弱极限,即对任何 $\varphi \in K\left(\frac{1}{2}\right)$,我们有

$$\langle h_N(\mathrm{e}^\xi), \varphi(\xi)\rangle \longrightarrow \langle h(\mathrm{e}^\xi), \varphi(\xi)\rangle. \qquad (3.10.5)$$

故

$$\left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} h_N(\mathrm{e}^\xi)\mathrm{d}\xi,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} \varphi(-\xi)\mathrm{d}\xi \right\rangle$$

$$\to \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\mathrm{i}(\sigma-\frac{1}{2}))\xi} h(\mathrm{e}^\xi)\mathrm{d}\xi,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\mathrm{i}(\sigma-\frac{1}{2}))\xi} \varphi(-\xi)\mathrm{d}\xi \right\rangle.$$

由定理(3.10.1)知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} \varphi(-\xi)\mathrm{d}\xi \in S[t], \quad \text{当}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2},$$

$$(\zeta(s,a_1) - \zeta(s,a_2))\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} \varphi(-\xi)\mathrm{d}\xi \in S[t].$$

故

$$\left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} h_N(\mathrm{e}^\xi)\mathrm{d}\xi, (\zeta(s,a_1) - \zeta(s,a_2)) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} \varphi(-\xi)\mathrm{d}\xi \right\rangle$$

收敛到

$$\left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} h(\mathrm{e}^\xi)\mathrm{d}\xi, (\zeta(s,a_1) - \zeta(s,a_2)) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} \varphi(-\xi)\mathrm{d}\xi \right\rangle.$$

故当 $\sigma > 0$ 时

$$\left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} j_N(\mathrm{e}^\xi)\mathrm{d}\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} \varphi(-\xi)\mathrm{d}\xi \right\rangle$$

收敛.

故有

$$\langle j_N(\mathrm{e}^\xi), \varphi(\xi)\rangle$$

收敛. 这就是说 $j_N(\mathrm{e}^\xi)$ 对于 $K\left(\frac{1}{2}\right)$为弱收敛,其弱极限为 $j(\mathrm{e}^\xi)$. 今记

$$j(\mathrm{e}^\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho_n(\mathrm{e}^\xi),$$

我们有

$$\langle j_N(\mathrm{e}^\xi), \varphi(\xi)\rangle \longrightarrow \langle j(\mathrm{e}^\xi), \varphi(\xi)\rangle.$$

故

$$(\zeta(s,a_1) - \zeta(s,a_2))\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} h(\mathrm{e}^\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{i})\xi} j(\mathrm{e}^\xi)\mathrm{d}\xi, \quad \sigma > 0, \qquad (3.10.6)$$

或者说

$$(\zeta(s,a_1) - \zeta(s,a_2))\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\mathrm{i}\sigma)\xi} f(\mathrm{e}^\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\mathrm{i}\sigma)\xi} g(\mathrm{e}^\xi)\mathrm{d}\xi,$$

此外

$$f(\mathrm{e}^{\xi})=\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{2}}h(\mathrm{e}^{\xi}),g(\mathrm{e}^{\xi})=\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{2}}j(\mathrm{e}^{\xi}),$$

$$h(\mathrm{e}^{\xi}),j(\mathrm{e}^{\xi})\in K'\left(\frac{1}{2}\right).$$

证毕.

定理 3.10.2　如果 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}h(x)$，$h(\mathrm{e}^{\xi})\in K'\left(\frac{1}{2}\right)$，且(3.10.5)式成立，则我们有

$$(\zeta(s,a_1)-\zeta(s,a_2))\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x^{s-1}g(x)\mathrm{d}x,\sigma>0,$$

其中 $g(x)=x^{-\frac{1}{2}}j(x),j(\mathrm{e}^{\xi})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\rho_n(\mathrm{e}^{\xi})\in K'\left(\frac{1}{2}\right)$.

此处，由于在 $0<\sigma_1<\sigma<\sigma_2<1$ 内

$$\zeta(s,a_1)-\zeta(s,a_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+a_1)^s}-\frac{1}{(n+a_2)^s}\right)$$

为一致收敛，故我们可得到如下的定理：

定理 3.10.3　如果 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}h(x),h(\mathrm{e}^{\xi})\in K'\left(\frac{1}{2}\right)$，则

$$(\zeta(s,a_1)-\zeta(s,a_2))\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}x^{s-1}\sum_{k=0}^{\infty}[f((k+a_1)x)-f((k+a_2)x)]\mathrm{d}x.\tag{3.10.7}$$

证　类似于定理 3.10.2 的证明，我们能证

$$(\zeta_K(s,a_1)-\zeta_K(s,a_2))\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}x^{s-1}g^K(x)\mathrm{d}x,$$

此处

$$g^K(x)=x^{-\frac{1}{2}}j^K(x)=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\rho_n^K(x),$$

$$\rho_n^K(x)=\sum_{k=0}^{K}[(k+a_1)^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg(k+a_2)x)$$
$$-(k+a_2)^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg(k+a_2)x)],$$

这就是说

$$(\zeta_K(s,a_1)-\zeta_K(s,a_2))\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}x^{s-\frac{1}{2}-1}\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{\infty}a_n[(k+a_1)^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg(k+a_1)x)$$
$$-(k+a_2)^{-\frac{1}{2}}\psi_n(\lg(k+a_2)x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}x^{s-1-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{K}[(k+a_1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{H}((k+a_1)x)$$
$$-(k+a_2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{H}((k+a_2)x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}x^{s-1}\sum_{k=0}^{K}[f((k+a_1)x)-f((k+a_2)x)]\mathrm{d}x.$$

故

$$\int_0^{\infty}x^{s-1}\sum_{k=0}^{K}[f((k+a_1)x)-f((k+a_2)x)]\mathrm{d}x$$

在 $Z'\left(\frac{1}{2}\right)$内弱收敛. 故

$$\mathrm{e}^{\frac{\xi}{2}}\sum_{k=0}^{K}[f(\mathrm{e}^{\xi+\lg(k+a_1)})-f(\mathrm{e}^{\xi+\lg(k+a_2)})]$$

在 $K'\left(\frac{1}{2}\right)$内弱收敛，其极限为

$$e^{\frac{\xi}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}[f(e^{\xi}(k+a_1))-f(e^{\xi}(k+a_2))].$$

故最后得

$$(\zeta(s,a_1)-\zeta(s,a_2))\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}x^{s-1}\sum_{k=0}^{\infty}[f((k+a_1)x)-f((k+a_2)x)]\mathrm{d}x.$$

这就是(3.10.7)式.

例 3.10.1 $\qquad f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x}.$

因

$$e^{\sigma\xi}\frac{\sin\pi e^{\xi}}{e^{\xi}}\in L(-\infty,+\infty),$$

故 $\quad e^{\xi}f(e^{\xi})\in S'$,由定理 3.10.3 知

$$(\zeta(s,1)-\zeta(s,\frac{1}{2}))\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}x^{s-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(k+1)\pi x}{(k+1)x}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(k+\frac{1}{2}\right)x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}x^{s-2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(k+1)\pi x}{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\ \frac{\pi}{2}x}{\frac{1}{2}(2k+1)}\right]\mathrm{d}x,$$

$$0<\sigma<1.$$

从恒等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k\pi}=[x]-x+\frac{1}{2},$$

知

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(k+1)\pi x}{k+1}$$

$$=\pi\left(\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi\ \frac{x}{2}}{2k+1}$$

$$=\pi\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi\ \frac{x}{2}}{k\pi}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x}{2k\pi}\right\}$$

$$=\pi\left[\left[\frac{x}{4}\right]-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right].$$

故

$$(2-2^s)\zeta(s)\left(-\frac{\Gamma(s-1)}{\pi^{s-1}}\cos\frac{s\pi}{2}\right)$$

$$=\pi\int_0^{\infty}x^{s-2}\left\{\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-2\left[\frac{x}{4}\right]+\frac{x}{2}-1+\left[\frac{x}{2}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\infty}x^{s-2}\left\{2\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{1}{2}x-2\left[\frac{x}{4}\right]\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\infty}x^{s-2}\left\{2\left[\frac{x}{2}\right]-2\left[\frac{x}{4}\right]-\frac{x}{2}\right\}\mathrm{d}x.$$

第四章　广义弱函数与弱函数乘法

在本章我们将引进广义弱函数的概念，利用广义弱函数我们将解决弱函数的乘法和卷积问题，特别地将解决经典广义函数的乘法与卷积问题，为此我们将首先引入广义数的概念.

1. 广义数

华罗庚把形式的三角级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{nix}$$

定义为周期广义函数. 对于实直线性形我们可以把形式的 Hermite 展式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$$

也定义为新的广义函数，这就是第三章所引进的弱函数. 类似地我们可以很自然地把形式的数级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

定义为广义数，我们记为

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{4.1.1}$$

如果 $a_n, n=0,1,2,\cdots$ 为实，则 a 为广义实数；如果 $a_n, n=0,$

$1,2,\cdots$ 为复，则我们说 a 为广义复数.

我们定义广义数之加法和数乘如下：

$$\lambda a + \mu b = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n). \tag{4.1.2}$$

我们将以“R”表广义实数集合，“C”表广义复数集合.

对于乘法我们可以有不同的定义，现在定义广义数的乘法如下：

$$a \cdot b = \sum_{k=0}^{\infty} C_k, \tag{4.1.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k = (a)_n (b)_n,$$

$$(a)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

当然我们也可以定义

$$C_k = \sum_{m+n=k} a_m b_n,$$

这样能得到另一种广义数的乘法.

如果 $a \in$“R”，而(4.1.1)为收敛，则我们说 a 为一普通实数，如果(4.1.1)发散到 $\pm\infty$，则我们说 a 为 $\pm\infty$，故“R”包含通常实数，$+\infty$ 和 $-\infty$.

如果 a,b 为无限，且 $\frac{(a)_k}{(b)_k} \to 1$，当 $k \to \infty$，则称 a,b 等价，记为 $a \sim b$.

如果 a,b 为有限，

$$(a)_k - (b)_k \to 0,\ 当\ k \to \infty,$$

则我们称 a,b 等价，记为 $a \sim b$.

引进了广义数之后，我们就得到了每一个弱函数的某点 x_0 的函数值为广义数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n(x_0)$，对于收敛级数(4.1.1)我们知 $(a)_k\to$实数 a，对于一般级数(4.1.1)，我们也就可以说 $(a)_k\to$广义数 a.

2. 广义弱函数

在(4.1.1)中如果把 a_n 取为弱函数 $a_n(x)$，$n=0,1,2,\cdots$，则我们称形式级数为广义弱函数. 显然广义弱函数的全体是一线性集. 记

$$a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x). \tag{4.2.1}$$

我们可以定义

$$xa(x)=\sum_{n=0}^{\infty}xa_n(x).$$

设

$$a_n(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{n_j}\psi_j(x), \tag{4.2.2}$$

对于(4.2.1)的 N 次部分和 $(a(x))_N$，有

$$\langle (a(x))_N,\psi_j(x)\rangle=\sum_{n=0}^{N}\langle a_n(x),\psi_j(x)\rangle=\sum_{n=0}^{N}a_{n_j},$$

故当 $N\to\infty$时，

$$\langle (a(x))_N,\psi_j(x)\rangle\to\sum_{n=0}^{\infty}a_{n_j}=\lambda_j, \tag{4.2.3}$$

其中 λ_j 为广义数.

我们可以定义

$$\langle a(x),\psi_j(x)\rangle=\lambda_j, \tag{4.2.4}$$

则对任意广义数 a，有

$$\langle a\psi_i(x),\psi_j(x)\rangle=a\langle \psi_i(x),\psi_j(x)\rangle,$$

故

$$a(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j\psi_j(x). \tag{4.2.5}$$

上式右端为 K 上的“弱”收敛级数.

3. 弱函数的乘积

李邦河应用非标准分析解决了任意两个一维广义函数的乘积. 我们这里应用上述广义弱函数概念，解决了任意两个弱函数乘积，当然也包含了两个 S 广义函数的乘积，下章将讨论 C_0^∞ 广义函数乘积.

设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(x),\quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\psi_n(x)$$

为二弱函数，我们可以定义其乘积为广义弱函数，就是说

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x), \tag{4.3.1}$$

此处 $C_n(x)$，$n=0,1,2,\cdots$为弱函数.

下面取

$$\sum_{n=0}^{m}C_n(x)=(f(x))_m(g(x))_m. \tag{4.3.2}$$

由(4.2.5)式知

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j\psi_j(x),$$

$$\lambda_j=\sum_{n=0}^{\infty}\langle C_n(x),\psi_j(x)\rangle$$

$$= \lim_{m\to\infty}\langle (f(x))_m (g(x))_m, \psi_j(x)\rangle, j = 0,1,2,\cdots$$

如果 $\lambda_j, j=0,1,2,\cdots$ 为有限数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 为一弱函数.

4. sgn$x$ 与 $\delta(x)$ 的乘积

我们将证明

$$\mathrm{sgn}x\cdot\delta(x) = 0. \tag{4.4.1}$$

首先我们计算

$$\langle (\mathrm{sgn}x)_{2m}(\delta(x))_{2m}, \psi_{2j+1}(x)\rangle, \tag{4.4.2}$$

注意到

$$x\psi_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x) + \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x),$$

我们得到

$$\alpha_{2n+1}\sqrt{\frac{2n+1}{2}} + \alpha_{2n-1}\sqrt{\frac{2n}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{2n}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{2\pi}(-1)^n\psi_{2n}(0), \tag{4.4.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sgn}x)_{2m}$$

$$= \sum_{n\leqslant m-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^n\left[-\sqrt{\frac{2n+2}{2}}\psi_{2n+2} + \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\psi_{2n}(x)\right]\alpha_{2n+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n\leqslant m}(-1)^n\left[\alpha_{2n+1}\sqrt{\frac{2n+1}{2}} + \alpha_{2n-1}\sqrt{\frac{2n}{2}}\right]\psi_{2n}$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^m\alpha_{2m+1}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m}(x)$$

$$= 2(\delta(x))_{2m} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^m\alpha_{2m+1}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m}(x).$$

故

$$(\mathrm{sgn}x)_{2m}$$

$$= 2\int_0^x(\delta(x))_{2m}\mathrm{d}x - \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^m\alpha_{2m+1}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\int_0^x\psi_{2m}(x)\mathrm{d}x. \tag{4.4.4}$$

因为

$$\frac{1}{2}\psi'_{2m+1}(0)\frac{\psi_{2m+1}(t)}{t} = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\sqrt{4m+3}t}{t} + O\left[\frac{1+|t|^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}}\right],$$

故

$$\int_0^x(\delta(x))_{2m}\mathrm{d}x = \int_0^x\sum_{n\leqslant m}\psi_{2n}(0)\psi_{2n}(t)\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m}(0)\int_0^x\frac{\psi_{2m+1}(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\psi'_{2m+1}(0)\int_0^x\frac{\psi_{2m+1}(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^x\frac{\sin\sqrt{4m+3}t}{t}\mathrm{d}t + O\left[\int_0^x\frac{1+|t|^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{sgn}x + O\left[\frac{1}{1+\sqrt{m}x}\right] + O\left[\frac{1+|x|^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}}\right].$$

此处

$$\alpha_{2m+1}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\int_0^x\psi_{2m}(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\alpha_{2m+1}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}}{4m+1}\left[-\psi'_{2m}(x) - \int_0^x t^2\psi_{2m}(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= O\left[\frac{1+|x|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{m}}\right].$$

这是因为

$$\psi'_{2m} = -x\psi_{2m}(x) + \sqrt{4m}\psi_{2m-1}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2m}{2}}\psi_{2m-1}(x) - \sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m+1}(x)$$

$$= O(m^{\frac{1}{4}}) + O(|x|^{\frac{5}{2}}),$$

这里我们用到

$$\psi_m(x) \sim \sqrt{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\sqrt{2m+1}x - \frac{m\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1+|x|^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}}\right)\right]. \tag{4.4.5}$$

故由

$$(\delta(x))_{2m} = \sum_{n\leqslant m}\psi_{2n}(0)\psi_{2n}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m}(0)\frac{\psi_{2m+1}(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\psi'_{2m+1}(0)\frac{\psi_{2m+1}(x)}{x}, \tag{4.4.6}$$

$$\langle(\mathrm{sgn}x)_{2m}(\delta(x))_{2m}, \psi_{2j+1}(x)\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{sgn}x)_{2m}(\delta(x))_{2m}\psi_{2j+1}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}2\left[\int_0^x(\delta(t))_{2m}\mathrm{d}t + O\left(\frac{1+|x|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{m}}\right)\right]$$

$$\cdot (\delta(x))_{2m}\psi_{2j+1}(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^x(\delta(t))_{2m}\mathrm{d}t\right]^2\psi'_{2j+1}(x)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}O\left(\frac{1}{m^{\frac{1}{4}}}\right)\left|1+|x|^{\frac{5}{2}}\frac{\psi_{2j+1}(x)}{x}\right|\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^x(\delta(t))_{2m}\mathrm{d}t\right]^2\psi'_{2j+1}(x)\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{m^{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$\to -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\psi_{2j+1}(x)\mathrm{d}x = 0, \text{当 } m\to\infty \text{ 时}.$$

由于

$$(\mathrm{sgn}x)_{2m+1}(\delta(x))_{2m+1} - (\mathrm{sgn}x)_{2m}(\delta(x))_{2m}$$

$$= \alpha_{2m+1}\psi_{2m+1}(x)(\delta(x))_{2m}$$

$$= \alpha_{2m+1}\psi_{2m+1}(x)\frac{\psi_{2m+1}(x)}{x}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m}(0)$$

$$= \frac{1}{x}O\left(\frac{1+|x|^5}{\sqrt{m}}\right), \tag{4.4.7}$$

故

$$\langle(\mathrm{sgn}x)_{2m+1}(\delta(x))_{2m+1}, \psi_{2j+1}(x)\rangle$$

$$= \langle(\mathrm{sgn}x)_{2m}(\delta(x))_{2m}, \psi_{2j+1}(x)\rangle + \left\langle O\left(\frac{1+|x|^5}{\sqrt{m}}\right), \frac{\psi_{2j+1}(x)}{x}\right\rangle$$

$\to 0$，当 $m\to\infty$ 时.

故

$$\mathrm{sgn}x \cdot \delta(x) = 0.$$

5. $\frac{1}{x}$和$\delta(x)$的乘积

在本节我们将证明

$$\frac{1}{x}\cdot\delta(x) = -\frac{1}{2}\delta'(x). \tag{4.5.1}$$

只需要证明，当 $n\to\infty$ 时

$$\left\langle\left(\frac{1}{x}\right)_m(\delta(x))_m, \psi_{2j+1}(x)\right\rangle \to \frac{1}{2}\psi'_{2j+1}(0), j = 0,1,2,\cdots$$

从(4.4.7)式我们有

$$\langle\left(\frac{1}{x}\right)_{2m+1}(\delta(x))_{2m+1}-\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}(\delta(x))_{2m},\psi_{2j+1}(x)\rangle$$

$$=\langle\alpha_{2m+1}\psi_{2m+1}(x)(\delta(x))_{2m},\psi_{2j+1}(x)\rangle$$

$$=\langle O\left[\frac{1+|x|^5}{\sqrt{m}}\right],\frac{\psi_{2j+1}(x)}{x}\rangle\to 0,\text{当 } m\to\infty \text{ 时}.$$

故只需证明

$$\langle\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}(\delta(x))_{2m},\psi_{2j+1}(x)\rangle\to\frac{1}{2}\psi'_{2j+1}(0).\quad(4.5.2)$$

由(4.4.6)式有

$$\frac{1}{x}\psi'_{2m+1}(0)\alpha_{2m+1}=\langle(\delta(x))_{2m},1\rangle$$

$$=\sum_{n\leqslant m}(-1)^n\sqrt{2\pi}\psi_{2n}^2(0)=(1)_{2m}|_{x=0},$$

从(4.3.4)式我们有

$$x\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}=\sum_{n\leqslant m}\alpha_{2n+1}\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\psi_{2n}(x)+\sqrt{\frac{2n+2}{2}}\psi_{2n+1}(x)\right)$$

$$=\sum_{n\leqslant m}\left[\alpha_{2n+1}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}+\alpha_{2n-1}\sqrt{\frac{2n}{2}}\right]\psi_{2n}(x)$$

$$-\alpha_{2m+1}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m}(x)$$

$$=(1)_{2m}-\alpha_{2m+1}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m}(x),$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}(\delta(x))_{2m}\psi_{2j+1}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}(1)_{2m}\frac{\psi_{2j+1}(x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$-\alpha_{2m+1}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\delta(x))_{2m}\frac{\psi_{2j+1}(x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=I_1(j,m)-I_2(j,m),$$

我们将证明

$$I_1(j,m)\to\psi'_{2j+1}(0),\quad(4.5.3)$$

$$I_2(j,m)\to\frac{1}{2}\psi_{2j+1}(0).\quad(4.5.4)$$

要证明(4.5.3)式只需证明

$$|(1)_{2m}-1|=O\left[\frac{1+|x|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{m}}\right].\quad(4.5.5)$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1)_{2m}]=\sum_{n\leqslant m}(-1)^n\sqrt{2\pi}\psi_{2n}(0)\psi'_{2n}(x)$$

$$=\sum_{n\leqslant m}(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\psi_{2n}(0)\left[\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\psi_{2n+1}(x)-\sqrt{\frac{2n}{2}}\psi_{2n-1}(x)\right]$$

$$=(-1)^{m+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\psi'_{2m+1}(0)\psi_{2m+1}(x).$$

故

$$(1)_{2m}=(1)_{2m}|_{x=0}+(-1)^{m+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\psi'_{2m+1}(0)\int_0^x\psi_{2m+1}(x)\mathrm{d}x$$

$$=(1)_{2m}|_{x=0}+(-1)^{m+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\psi'_{2m+1}(0)}{4m+3}$$

$$\cdot\int_0^x(t^2\psi_{2m+1}(t)-\psi''_{2m-1}(t))\mathrm{d}t$$

$$= (1)_{2m}|_{x=0} + O\left[\frac{1+|x|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{m}}\right].$$

$$(1)_{2m}|_{x=0} = \sum_{n\leqslant m}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{2n}(x)\mathrm{d}x\psi_{2n}(0)$$

$$=\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m}(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_{2m+1}(x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\psi'_{2m+1}(0)\alpha_{2m+1},$$

由(2.4.19)式知上式等于 $1+O\left[\frac{1}{\sqrt{m}}\right]$.

因此我们有(4.5.5).

从(4.5.5)我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\delta(x))_{2m}((1)_{2m}-1)\frac{\psi_{2j+1}(x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=O\left[\frac{1}{\sqrt{m}}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}(\delta(x))_{2m}(1+|x|^{\frac{5}{2}})\frac{\psi_{2j+1}(x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=O\left[\frac{1}{\sqrt{m}}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}|(\delta(x))_{2m}^{2}|\mathrm{d}x$$

$$=O(m^{-\frac{1}{4}}).$$

故我们证得(4.5.3)式.

因为

$$I_2(j,m)=\alpha_{2m+1}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\delta(x))_{2m}\psi_{2m}(x)\frac{\psi_{2j+1}(x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\alpha_{2m+1}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\frac{\psi'_{2m+1}(0)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_{2m+1}(x)}{x}\psi_{2m}(x)\frac{\psi_{2j+1}(x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=(1)_{2m}|_{x=0}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\frac{\psi_{2m+1}(x)}{x}\psi_{2m}(x)\frac{\psi_{2j+1}(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

从(5.4.7)式我们得

$$\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m}(x)\psi_{2m+1}(x)$$

$$\sim\frac{1}{\pi}\left[\cos(\sqrt{4m+1}x-m\pi)\cos\left(\sqrt{4m+3}x-\frac{2m+1}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.+O\left[\frac{1+|x|^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}}\right]\right]$$

$$\sim\frac{1}{\pi}\left[\cos\sqrt{4m}x\sin\sqrt{4m}x+O\left(\frac{1+|x|^{\frac{5}{2}}}{m^{1/4}}\right)\right]$$

$$\sim\frac{1}{2\pi}\left[\sin4\sqrt{m}x+O\left[\frac{1+|x|^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}}\right]\right],$$

但对于任何 $\varphi\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\varphi(x)\mathrm{d}x\to\varphi(0),\text{当 }\lambda\to+\infty,$$

故我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\frac{\psi_{2m}(x)\psi_{2m+1}(x)}{x}\frac{\psi_{2j+1}(x)}{x}\mathrm{d}x\to\frac{1}{2}\psi'_{2j+1}(0).$$

由(4.5.5)式我们得到(4.5.4)式.

合并考虑(4.5.3)式,(4.5.4)式得到(4.5.2)式,因此得到(4.5.1)式.

6. 弱函数的卷积

对于任意两个 S 函数 $f(x),g(x)$,其卷积定义为

$$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.\qquad(4.6.1)$$

现在我们要把(4.6.1)式推广到弱函数.

设 $f(x),g(x)$为两个弱函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(x),\tag{4.6.2}$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\psi_n(x),\tag{4.6.3}$$

我们定义 $f(x),g(x)$之卷积 $f(x)*g(x)$为一广义弱函数，这就是说

$$f(x)*g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x),\tag{4.6.4}$$

其中 $c_n(x)$满足

$$\sum_{n=0}^{N}c_n(x)=(f(x))_N*(g(x))_N.\tag{4.6.5}$$

注意$(f(x))_N,(g(x))_N$ 均为 S 函数，故(4.6.5)式右端有意义，即

$$(f(x))_N*(g(x))_N=\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x-y))_N\cdot(g(y))_N\mathrm{d}y.\tag{4.6.6}$$

对任何广义弱函数

$$c(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x),\tag{4.6.7}$$

定义其 Fourier 变换为

$$\widetilde{c(x)}(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{c_n(x)}(\xi),\tag{4.6.8}$$

上式右端$\widetilde{c_n(x)}(\xi)\in S$，故$\widetilde{c(x)}(\xi)$仍为一广义弱函数.

有时我们采用记号

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),$$
$$(f*g)(x)=f(x)*g(x),$$

则对任何 $f(x),g(x)\in S$，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widetilde{f*g})(x)=(f\cdot g)(x),$$

$$(\widetilde{f\cdot g})(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)(x).$$

或简记之为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widetilde{f*g}=f\cdot g,$$

$$\widetilde{f\cdot g}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f*g.$$

故对任意弱函数 $f(x),g(x)$而言就有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widetilde{(f)_N*(g)_N}=f_N\cdot g_N,$$

$$\widetilde{f_N\cdot g_N}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_N*g_N.$$

故对任意两个弱函数之乘积和卷积有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widetilde{f*g}=f\cdot g,\tag{4.6.9}$$

$$\widetilde{f\cdot g}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f*g.\tag{4.6.10}$$

7. 非线性双曲型守恒律

流体力学中最重要的偏微分方程是粘性流体中的 Navier-Stokes 方程和气体力学中的 Euler 方程. 从 Riemann 开始，Euler 方程组的整体解存在性定理就吸引了许多大数学家的研究，如 Hugoniof，Hadamand J，Von Neumann J，Courant Friedrichs，Lax，Glimm，Oleinik，Dafermos 等等.

但是尚存在许多基本问题没有解决，今日之重要成就还是在一维情形，对于等熵气流方程

$$\begin{cases}(\rho u)_t+(\rho u^2+p(\rho))_x=0,\\ \rho_t+(\rho u)_x=0,\quad p=c\rho^\gamma,\gamma>1\end{cases}\tag{4.7.1}$$

的初值问题是这方面研究的核心问题.

对于双曲型守恒律组初值问题的第一个整体解存在性的结果是由 Nishida 于 1968 年所获得，他是对等温流方程(即上述方程组 $\gamma=1$ 的情形)在 BV 始值且远离真空的情形下获得的. 之后许多人希望研究等熵流方程带真空的情形，这时出现了极端的困难，此时方程组变为非严格双曲型，这方面第一个结果是由 DiPerna 于 1983 年所获得. 他考虑 $\gamma=1+\frac{2}{2m+1}$，$m\geqslant 2$ 的情形，用新出现的补偿列紧原理得到了整体解的存在性.

应该指出，DiPerna 在用粘性消失法时存在某些错误. 第二步就是由丁夏畦、陈贵强、罗佩殊所获得[3][4][5]，他们用差分法解决了 $1<\gamma\leqslant\frac{5}{3}$ 的整体解的存在性定理，他们结合补偿列紧理论与经典的Euler-Poisson方程解决了此问题. 应该指出 γ 的这一区间在应用上是最重要的，绝大部分常见气体都是这种情形，例如空气的 $\gamma=1.4$；以后的一步是 Lions P L 等人，他们通过详细计算某些广义函数，得出了 $\gamma>\frac{5}{3}$时的解. 虽然人们在等熵流方面取得了巨大进展，但对于等温流的情形，初值含真空时问题长时间未获得解决，上述的诸种方法均无效. 在这种情形下熵方程已经不是Euler-Poisson方程而使问题变得难于处理. 只是到最近，这个问题才由黄飞敏和王振加以解决[22]. 他们首先用补偿列紧理论得到弱熵对的交换关系，然后对一个复参数用解析拓展方法，证明交换关系对于某些强熵也成立，最后证明了存在定理.

最近十几年来许多数学家相继发现了某些非严格双曲型方程组的高奇性间断解即所谓 δ 波的广义解. 张同及其学生们在这方面做了许多工作. 我们在这里要阐述前面讨论的弱函数在这种方程中的应用.

我们首先研究最简单的方程组

$$\begin{cases}u_t+\left(\frac{1}{2}u^2\right)_x=0,\quad t>0,\\ v_t+(uv)_x=0.\end{cases}\tag{4.7.2}$$

第一个方程是经典的 Hopf 方程，对于第二个方程我们引进位势函数

$$w(x,t)=\int_{(0,0)}^{(x,t)}v\mathrm{d}x-uv\mathrm{d}t,$$

其中 $w(x,t)$是不依赖于联$(0,0)$和(x,t)的积分路径的. 对于 $w(x,t)$我们有

$$w_x=v,\quad w_t=-uv,$$

故有

$$w_t+uw_x=0.$$

故原方程组(4.7.2)式就变为

$$\begin{cases}u_t+uu_x=0,\\ w_t+uw_x=0.\end{cases}\tag{4.7.3}$$

我们研究方程组(4.7.3)式的 Riemann 问题,其初值为

$$u(x,0)=\begin{cases}u_1, & x<0,\\ u_2, & x>0,\end{cases}\quad v(x,0)=\begin{cases}v_1, & x<0,\\ v_2, & x>0.\end{cases}$$

此时对于 $w(x,0)$,我们就有

$$w(x,0)=\begin{cases}v_1x, & x<0,\\ v_2x, & x>0.\end{cases}$$

方程组(4.7.3)式对 w 来说是线性的,其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u.$$

沿特征线

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=0,$$

即 w 沿特征线为常数,我们现在考虑 $u_1>u_2$ 的情况,这时存在从原点出发之特征线 L,沿特征线

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{u_1+u_2}{2}=a,$$

在特征线 L 上

$$w(x-0,t)=w(\xi_1,0)=v_1\xi_1,$$
$$w(x+0,t)=w(\xi_2,0)=v_2\xi_2,$$
$$x-\xi_1=u_1t,\quad x-\xi_2=u_2t.$$

故

$$\begin{aligned}w(x-0,t)&=v_1(x-u_1t)\\&=v_1(x-at)+v_1(a-u_1)t,\quad x<at.\\ w(x+0,t)&=v_2(x-u_2t)\\&=v_2(x-at)+v_2(a-u_2)t,\quad x>at.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}w(x,t)=&\ \bar{v}(x,t)(x-at)+v_1(a-u_1)t\\&+\{[v]a-[uv]\}t\mathrm{H}(x-at),\end{aligned}\quad(4.7.4)$$

其中

$$\bar{v}(x,t)=\begin{cases}v_1, & x<at,\\ v_2, & x>at,\end{cases}\quad [v]=v_2-v_1,$$

$$\mathrm{H}(x,0)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

故

$$v(x,t)=\frac{\partial w}{\partial x}=\bar{v}+\{[v]a-[uv]\}t\delta(x-at).\quad(4.7.5)$$

现在很清楚,方程组(4.7.2)式的解 $v(x,t)$ 是一 δ 测度,而非通常的函数解. 因此通常的 Sobolev 广义解的定义在此就不适应,需作适当推广,我们用 Lebesgue-Stieljes 积分给出一种定义,具体来说,我们说(u,w)为方程组(4.7.3)式的广义解,或者说(u,w_x)为方程组(4.7.2)式的广义解是指

$$\iint\left(u\varphi_t+\frac{u^2}{2}\varphi_x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,$$

$$\iint(\psi_t+u\psi_x)\mathrm{d}w(x,t)\mathrm{d}t=0,\quad(4.7.5)$$

对任何 $\varphi,\psi\in C_0^\infty(R^+)$.

对于上述 Riemann 问题的 $w(x,t)$ 我们还可以用上述弱函数理论来证明它满足(4.7.3)式. 为此我们先证 $\mathrm{H}'(x)=\delta(x)$,事实上

$$H(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \psi_j(x), \quad a_j = \int_0^{\infty} \psi_j(t)\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned}
H'(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \psi'_j(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a_j (\sqrt{2j}\psi_{j-1}(x) - x\psi_j(x)) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sqrt{2j}\psi_{j-1}(x) - xH(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{2(j+1)} a_{j+1} \psi_j(x) - xH(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{2(j+1)} \psi_{j+1}(t)\mathrm{d}t \psi_j(x) - xH(x),
\end{aligned}$$

但

$$\sqrt{2(j+1)}\psi_{j+1}(t) = 2t\psi_j(t) - \sqrt{2j}\psi_{j-1},$$

故

$$\begin{aligned}
H'(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [2t\psi_j(t) - \sqrt{2j}\psi_{j-1}(t)]\mathrm{d}t\psi_j(x) - xH(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} t\psi_j(t)\mathrm{d}t\psi_j(x) - xH(x) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [t\psi_j(t) - \sqrt{2j}\psi_{j-1}(t)]\mathrm{d}t\psi_j(x) \\
&= xH(x) - xH(x) - \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \psi'_j(t)\mathrm{d}t\psi_j(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(0)\psi_j(x) = \delta(x).
\end{aligned}$$

设 $u(x) = \begin{cases} u_1, & x<0, \\ u_2, & x>0. \end{cases}$ 则我们可由前面所述弱函数乘法及(4.4.1)式知

$$\begin{aligned}
u(x)\cdot\delta(x) &= \frac{u_1+u_2}{2}\delta(x) + \frac{u_2-u_1}{2}\mathrm{sgn}x\cdot\delta(x) \\
&= \frac{u_1+u_2}{2}\delta(x).
\end{aligned}$$

我们现在证明 $w(x,t)$ 满足(4.7.2)式. 不失一般性可假定$a=0$,则有

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= \bar{v}x - v_1 u_1 t - [uv]tH(x), \\
w_t &= -v_1 u_1 - [uv]H(x), \\
w_x &= \bar{v} - [uv]tH'(x) = \bar{v} - [uv]t\delta(x), \\
uw_x &= \bar{v}u - [uv]tu\delta(x) = \bar{v}u - [uv]t\frac{u_1+u_2}{2}\delta(x) \\
&= \bar{v}u = v_1 u_1 + [uv]H(x).
\end{aligned}$$

故我们有

$$w_t + uw_x = 0.$$

此处我们考虑 t 时间参数使对任何固定的 t,$w(x,t)$ 为 x 的弱函数.

这种带高奇性解的方程包括一个重要的零压流方程

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x = 0. \end{cases} \tag{4.7.6}$$

这个方程在解的光滑区域内和(4.7.2)式是一样的. 黄飞敏和王振利用丁夏畦所引进的 Lebesgue-Stieljes 积分的广义解对(4.7.6)式进行了彻底的研究[23].

因此对于 Riemann 问题来说和上述(4.7.2)式之不同之处仅在间断线$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a$ 的值不一样. 我们将从其广义解的积分定义中求出此时 a 就可以了,此时广义解的定义为

$$\begin{cases}\iint(\varphi_t+u\varphi_x)\mathrm{d}w\mathrm{d}t=0,\\ \iint(u\psi_t+u^2\psi_x)\mathrm{d}w\mathrm{d}t=0,\end{cases}\tag{4.7.7}$$

对任何 $\varphi,\psi\in C_0^\infty(R^+)$.

设 φ,ψ 的支集包含在上半平面内的区域 D 内,D 包含了间断线 L 的一部分,D 的 L 之左部分为 D_1,$\partial D_1=L_1+L$,L 之右部分为 D_2,$\partial D_2=L_2+L$,从第一式出发,设

$$\bar{w}=\begin{cases}w(at_-,t), & x<at,\\ w(at_+,t), & x>at,\end{cases}$$

$$\iint_D(\varphi_t+u\varphi_x)\mathrm{d}w\mathrm{d}t$$

$$=\iint_D(\varphi_t+u\varphi_x)\mathrm{d}(w-\bar{w})\mathrm{d}t+\iint_D(\varphi_t+u\varphi_x)\mathrm{d}\bar{w}\mathrm{d}t$$

$$=\iint_{D_1}(\varphi_t+u\varphi_x)\mathrm{d}(w-\bar{w})\mathrm{d}t+\iint_{D_2}(\varphi_t+u\varphi_x)\mathrm{d}(w-\bar{w})\mathrm{d}t$$

$$+\iint_D(\varphi_t+u\varphi_x)\mathrm{d}\bar{w}\mathrm{d}t$$

$$=\iint_{D_1}(\rho\varphi_t+\rho u\varphi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{D_2}(\rho\varphi_t+\rho u\varphi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$+\iint_D(\varphi_t+u\varphi_x)[w]\mathrm{d}H(x-at)\mathrm{d}t$$

$$=\oint_{L_1+L}(-\rho\varphi\mathrm{d}x+\rho u\varphi\mathrm{d}t)+\oint_{L_2+L}(-\rho\varphi\mathrm{d}x+\rho u\varphi\mathrm{d}t)$$

$$+\iint_D(\varphi_t+u\varphi_x)[w]\delta(x-at)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=\int_L[\rho]\varphi\mathrm{d}x-[\rho u]\varphi\mathrm{d}t+\int_L\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}[w]\mathrm{d}t$$

(此处我们取 $u=a$ 在 $x=at$ 上)

$$=\int_L\varphi\left([\rho]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-[\rho u]\right)\mathrm{d}t-\int_L\varphi\frac{\mathrm{d}[w]}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=0.$$

故我们得

$$[\rho]a-[\rho u]-[w]_t=0.\tag{4.7.8}$$

同样从(4.7.7)式的第二式出发就会得到

$$[\rho u]a-[\rho u^2]-a[w]_t=0.\tag{4.7.9}$$

联立解(4.7.8)式,(4.7.9)式就得到

$$[\rho]a^2-2a[\rho u]+[\rho u^2]=0.$$

故得

$$a=\frac{[\rho u]\pm\sqrt{[\rho u]^2-[\rho][\rho u^2]}}{[\rho]}$$

$$=\frac{\rho_2u_2-\rho_1u_1\pm\sqrt{\rho_1\rho_2(u_2-u_1)^2}}{\rho_2-\rho_1}.$$

故得

$$a=\frac{\rho_2u_2-\rho_1u_1\pm\sqrt{\rho_1\rho_2}(u_2-u_1)}{\rho_2-\rho_1}=\frac{\sqrt{\rho_2}u_2-\sqrt{\rho_1}u_1}{\sqrt{\rho_2}-\sqrt{\rho_1}},$$

或 $\dfrac{\sqrt{\rho_2}u_2+\sqrt{\rho_1}u_1}{\sqrt{\rho_2}+\sqrt{\rho_1}}.$

a 之第一个值为增根，第二个值为我们所需要的，故有

$$a=\frac{\sqrt{\rho_2}u_2+\sqrt{\rho_1}u_1}{\sqrt{\rho_2}+\sqrt{\rho_1}}.$$

由于我们一开始就假定了 $u_1>u_2$，显然我们有

$$u_1>a>u_2.$$

故此时不能和上节一样用广义函数(弱函数)乘法来解释方程组(4.7.6)式，而要用(4.7.7)式的广义解定义来解释方程组(4.7.6)式.

第五章 $\mathscr{D}$ 弱函数

1. 基本概念

在第一章已经证明了 Hermite 函数系 $\{\psi_n(x), n=0,1,2,\cdots\}$ 构成 $L_2(-\infty,+\infty)$ 的一组完全正交基，其中

$$\psi_n(x)=\frac{\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}},$$

$\mathrm{H}_n(x)$ 为第 n 次 Hermite 多项式

$$\mathrm{H}_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\cdot D^n\mathrm{e}^{-x^2},\quad n=0,1,2,\cdots$$

设

$$\alpha_m(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant m,\\ \geqslant 0, & m<x\leqslant m+1,\\ 0, & |x|>m+1,\end{cases}\quad \alpha_m(x)\in C_0^\infty,$$

容易看出函数系

$$\left\{f_n^m(x)=\alpha_m(x)\psi_n(x),\begin{matrix}m=1,2,\cdots\\ n=0,1,2,\cdots\end{matrix}\right\}$$

的所有有限线性组合在 $L_2(-\infty,+\infty)$ 中稠密，根据 Hilbert 空间的理论，由其中可以选取适当的有限线性组合 $e_j(x)$，使

$$\{e_j(x),\quad j=0,1,2,\cdots\}$$

构成 $L_2(-\infty,+\infty)$ 的一组完全正交基，它们都具紧支集.

令

$$K = \mathrm{Span}\{e_j(x), j = 0,1,2,\cdots\}. \qquad (5.1.1)$$

根据定理 3.2.1，我们知对任何实数序列$\{a_j\}$，

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot e_j(x) \qquad (5.1.2)$$

对 K 而言为弱收敛，且其和 $f\in K'$，K'表示 K 的线性（可加）泛函. 反之，任意 K 之线性泛函 f 总可表示为 K 之弱收敛级数.

这样的 $f(x)$我们称为 $\mathscr{D}$ 弱函数. K'包含一个重要的子类$(C_0^\infty)'$，它是如下定义的：

设 $f_n(x)\in C_0^\infty$，$f_n(x)$对任何 C_0^∞ 之函数弱收敛，即

$$\lim_{n\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \text{ 存在}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty,$$

则我们称$\{f_n(x)\}$确定一 C_0^∞ 广义函数 $f(x)$，其中

$$\langle f(x), \varphi(x)\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

我们记 $f(x)\in(C_0^\infty)'$，容易看出$(C_0^\infty)'$为线性集合.

如果 $f(x)\in(C_0^\infty)'$，我们知

$$a_j = \langle f(x), e_j(x)\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)e_j(x)\mathrm{d}x$$

存在.

令

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j(x),$$

则

$$\langle g(x), \sum_{j=0}^{N} b_j e_j(x)\rangle = \sum_{j=0}^{N} a_j b_j.$$

而

$$\begin{aligned}\langle f(x), \sum_{j=0}^{N} b_j e_j(x)\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle f_n(x), \sum_{j=0}^{N} b_j e_j(x)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{N} b_j\langle f_n(x), e_j(x)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{N} a_j^n b_j \\ &= \sum_{j=0}^{N} a_j b_j.\end{aligned}$$

由此得到 $f(x)$的展开式

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j(x).$$

此即说明

$$(C_0^\infty)' \subset K'.$$

例 5.1.1 任意局部可和函数

$$a(x) \in (C_0^\infty)' \subset K'.$$

令

$$a_N(x) = \begin{cases} a(x), & |x| \leqslant N, \\ 0, & |x| > N.\end{cases}$$

然后对 $a_N(x)$作中值函数

$$(a_N)_h = \frac{1}{\lambda h}\int_{|x|\leqslant h} w(x-y, h)a_N(y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$w(x,h)=\begin{cases}\exp\left\{\dfrac{x^2}{e^{x^2}-h^2}\right\}, & |x|\leqslant h,\\ 0, & |x|>h.\end{cases}$$

$$\lambda=\int_{|x|\leqslant 1}\exp\left\{\frac{x^2}{x^2-1}\right\}dx.$$

显然我们可以取 $h=\frac{1}{N}$. 这样对任何 $\varphi(x)\in C_0^\infty$,我们就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(a_N)_{\frac{1}{N}}\varphi(x)dx\longrightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}a(x)\varphi(x)dx,$$

故 $$a(x)\in(C_0^\infty)'\subset K'.$$

2. $(C_0^\infty)'$的 Fourier 变换

设 $$\widetilde{e_n}(x)=\lambda_n(x),$$

我们有 $$\langle e_i(x),e_j(x)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}e_i(x)e_j(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda_i(x)\overline{\lambda_j(x)}dx=\delta_i^j.$$

故$\{\lambda_n(x)\}$构成复 $L_2(-\infty,+\infty)$的一组完整正交基底.

令

$$\widetilde{K}=\mathrm{Span}\{\lambda_n(x),n=0,1,2,\cdots\},$$
$$\widetilde{C_0^\infty}=Z,$$

即 Z 为所有 C_0^∞ 函数的 Fourier 变换的全体,他们都是整解析函数.

我们知 $\mathscr{D}$ 弱函数 $f(x)\in K'$ 均有弱收敛之级数表示(5.1.2). 我们可以定义 $f(x)$的 Fourier 积分为

$$\widetilde{f}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\cdot\widetilde{e_j}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\lambda_j(x),\qquad(5.2.1)$$

显然$\widetilde{f}(x)\in\widetilde{K'}$. 我们称$\widetilde{K'}$的元素为 Z 弱函数. 因此对上节例 5.1.1中的局部可积函数 $a(x)$,

$$a(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_je_j(x),$$

其中

$$a_j=\int_{-\infty}^{+\infty}a(x)e_j(x)dx,$$

其 Fourier 积分

$$\widetilde{a}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\lambda_j(x),\qquad(5.2.2)$$

此即为华罗庚所引进的整个实轴的广义函数.

如果存在 p,使 $a(x)=O(|x|^p)$. 当 $x\to\infty$,华罗庚称$\widetilde{a}(x)$的全体为 S 类广义函数. 如果 $\log|a(t)|=O(|t|)$,则$\widetilde{a}(x)$的全体称为 H 类广义函数. 此时$\widetilde{a}(x)$将为 $y>0$ 中调和函数

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}a(t)e^{itx-|t|y}dt$$

的边值.

3. $\mathscr{D}$ 弱函数的乘法和卷积

设已给二 $\mathscr{D}$ 弱函数 $f(x),g(x)$,

$$f(x)=\sum a_je_j(x),\quad g(x)=\sum b_je_j(x),$$

我们可以定义

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x).\qquad(5.3.1)$$

其中

$$\sum_{n=0}^{N} c_n(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j e_j(x) \sum_{k=0}^{N} b_k e_k(x). \tag{5.3.2}$$

显然 $c_n(x)$ 为弱函数.

因此如此定义的乘积为一广义弱函数,

$$f(x)g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \psi_j(x), \tag{5.3.3}$$

其中 p_j 为广义数.

我们还可以定义 $f(x),g(x)$ 的卷积 $f(x) * g(x)$ 为

$$f(x) * g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x), \tag{5.3.4}$$

其中

$$\sum_{n=0}^{N} d_n(x) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} a_j b_k e_j(x) * e_k(x), \tag{5.3.5}$$

$$e_j(x) * e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e_j(x-y)e_k(y)\mathrm{d}y, \tag{5.3.6}$$

其中 $d_n(x)\in C_0^\infty$,当然为一弱函数,故一般言之,$f(x) * g(x)$ 为广义弱函数.

4. Z 弱函数的乘积与卷积

所有 Z 弱函数均为 $\mathscr{D}$ 弱函数的 Fourier 变换. 对任何 $f(x),g(x)\in K'$,我们有 $\tilde f(x),\tilde g(x)\in\widetilde K$,且有

$$\tilde f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\lambda_j(x), \quad \tilde g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\lambda_j(x),$$

$$\tilde f(x)\cdot\tilde g(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N} a_j\lambda_j(x)\sum_{k=0}^{N} b_k\lambda_k(x)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{j,k=0}^{N} a_j b_k\lambda_j(x)\lambda_k(x),$$

$$(\tilde f * \tilde g)(x) = \tilde f(x) * \tilde g(x)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{j,k=0}^{N} a_j b_k\lambda_j(x) * \lambda_k(x).$$

由于

$$\widetilde{e_j\cdot e_k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\lambda_j * \lambda_k)(x), \tag{5.4.1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widetilde{e_j * e_k})(x) = (\lambda_j\cdot\lambda_k)(x). \tag{5.4.2}$$

故我们有

$$\tilde f(x)\cdot\tilde g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widetilde{f * g}(x), \tag{5.4.3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\tilde f * \tilde g)(x) = \widetilde{f\cdot g}(x). \tag{5.4.4}$$

附录一 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}-\pi^2\delta^2(x)$

我们这里叙述的是王振还没有发表的结果，他从弱函数的角度证明了如下定理.

定理 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}-\pi^2\delta^2(x)=\dfrac{1}{x^2}$，

其中
$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}\psi_{2n+1},$$

$$\delta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(0)\psi_n(x),$$

$$-\frac{1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}\psi'_{2n+1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n}\psi_{2n}(x),$$

均为弱函数.

我们现在用$(f)_m=(f(x))_m$表$f(x)$的 Hermite 展式的m次部分和，即为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(x),$$

则
$$(f)_m=(f(x))_m=\sum_{n\leqslant m}a_n\psi_n(x).$$

故我们有

$$\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}=\sum_{n\leqslant m-1}\alpha_{2n+1}\psi_{2n+1}(x),\ \alpha_{2n+1}=\int\frac{\psi_{2n+1}(x)}{x}\mathrm{d}x,\quad(1)$$

$$(\delta)_{2m}=\sum_{n\leqslant m}\psi_{2n}(0)\psi_{2n}(x)=\frac{1}{2}\psi'_{2m+1}\frac{\psi_{2m+1}(x)}{x}.\qquad(2)$$

我们注意到还有

$$\psi_{2n}^2(0)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}\binom{-\frac{1}{2}}{n},\quad\psi_{2n}(0)\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}n^{-\frac{1}{4}},$$

$$\psi'_{2n+1}(0)=\sqrt{2(2n+1)}\psi_{2n}(0)\sim(-1)^n\frac{2}{\sqrt{\pi}}n^{\frac{1}{4}},$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)=\sum_{n\leqslant m}\beta_{2n}\psi_{2n}(x),\ \beta_{2n}=\int\frac{\psi_{2n}(x)-\psi_{2n}(0)}{x^2}\mathrm{d}x.\qquad(3)$$

我们知$\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{x}$，故有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n}\psi_{2n}&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}\psi_{2n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}\left[\sqrt{\frac{2n+2}{2}}\psi_{2n+2}-\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\psi_{2n}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_{2n-1}\sqrt{\frac{2n}{2}}-\alpha_{2n+1}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right]\psi_{2n}.\end{aligned}$$

故得

$$\beta_{2n}=\alpha_{2n-1}\sqrt{\frac{2n}{2}}-\alpha_{2n+1}\sqrt{\frac{2n+1}{2}},\qquad(4)$$

$$\begin{aligned}x\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n}\psi_{2n}&=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n}\left[\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\psi_{2n+1}+\sqrt{\frac{2n}{2}}\psi_{2n-1}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\beta_{2n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}+\beta_{2n+2}\sqrt{\frac{2n+2}{2}}\right]\psi_{2n+1}.\end{aligned}$$

故我们有

$$\alpha_{2n+1}=\beta_{2n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}+\beta_{2n+2}\sqrt{\frac{2n+2}{2}}. \qquad (5)$$

为了证明定理，我们只需要证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}^{2}-\pi^{2}(\delta)_{2m}^{2}\right]\psi_{2j}\,\mathrm{d}x\longrightarrow\beta_{2j}\text{，当 }m\to\infty. \qquad (6)$$

首先证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}^{2}-\pi^{2}(\delta)_{2m}^{2}\right]\mathrm{d}x\longrightarrow 0\text{，当 }m\to\infty, \qquad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\delta)_{2m}^{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\psi'_{2m+1}(0), \qquad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}^{2}\mathrm{d}x=\frac{2(1)_{2m}|_{x=0}(1)_{2m-2}|_{x=0}}{\psi_{2m}^{2}(0)}. \qquad (9)$$

(8)之证：从(2)我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\delta)_{2m}^{2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n\leqslant m}\psi_{2n}^{2}(0)$$

$$=(\delta)_{2m}|_{x=0}=\frac{1}{2}\psi'_{2m+1}(0).$$

(9)之证：由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}^{2}\mathrm{d}x=\sum_{n\leqslant m-1}\alpha_{2n+1}^{2}$$

$$=\sum_{n\leqslant m-1}\alpha_{2n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_{2n+1}(x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}\mathrm{d}x,$$

$$x\left(\frac{1}{x^{2}}\right)_{2m}=\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}+\beta_{2m}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m+1},$$

故我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\beta_{2m}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\frac{\psi_{2m+1}}{x}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}\mathrm{d}x$$

$$=-\beta_{2m}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\alpha_{2m+1}+\sum_{n\leqslant m}(-1)^{n}\sqrt{2\pi}\psi_{2n}(0)\beta_{2n}.$$

由于

$$\beta_{2n}\psi_{2n}(0)=\alpha_{2n-1}\sqrt{\frac{2n}{2}}\psi_{2n}(0)-\alpha_{2n+1}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\psi_{2n}(0)$$

$$=-\left[\frac{1}{2}\alpha_{2n+1}\psi'_{2n+1}(0)+\frac{1}{2}\alpha_{2n-1}\psi'_{2n-1}(0)\right]$$

$$=-\left[(1)_{2n}|_{x=0}+(1)_{2n-2}|_{x=0}\right].$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}^{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\psi_{2m}^{2}(0)}\left[-\beta_{2m}\psi_{2m}(0)\right]\left[\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m}(0)\alpha_{2m+1}\right]$$

$$-\sum_{n\leqslant m}(-1)^{n}\sqrt{2\pi}\left[(1)_{2n}|_{x=0}+(1)_{2n-2}|_{x=0}\right]$$

$$=\frac{1}{\psi_{2m}^{2}(0)}\left[(1)_{2m}|_{x=0}+(1)_{2m-2}|_{x=0}\right]\cdot(1)_{2m}|_{x=0}$$

$$-(-1)^{m}\sqrt{2\pi}(-1)_{2m}|_{x=0}$$

$$=\frac{(1)_{2m}|_{x=0}}{\psi_{2m}^{2}(0)}\left[(1)_{2m}|_{x=0}+(1)_{2m-2}|_{x=0}-(-1)^{m}\sqrt{2\pi}\psi_{2m}^{2}(0)\right]$$

$$=\frac{2(1)_{2m}|_{x=0}(1)_{2m-2}|_{x=0}}{\psi_{2m}^{2}(0)}.$$

从(8)和(9)就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}^{2}-\pi^{2}(\delta)_{2m}^{2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2(1)_{2m}|_{x=0}(1)_{2m-2}|_{x=0}}{\psi_{2m}^{2}(0)}-\frac{\pi^{2}}{2}\psi'^{2}_{2m+1}(0)$$

$$=2\pi m^{\frac{1}{2}}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right]-2\pi m^{\frac{1}{2}}\left[1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

$$=O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

故(7)得证.

现在我们往证(6)：

注意到

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}^{2}-\pi^{2}(\delta)_{2m}^{2}\right]\psi_{2j}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}^{2}-\pi^{2}(\delta)_{2m}^{2}\right][\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)]\mathrm{d}x.$$

我们只需证

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}^{2}[-\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)]\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\beta_{2j}\qquad(10)$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi^{2}(\delta)_{2m}^{2}[\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\beta_{2j}.\qquad(11)$$

今往证(10)：

由于

$$x\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}=(1)_{2m}-\alpha_{2m+1}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\psi_{2m}(x),$$

我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)_{2m}^{2}[\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(1)_{2m}-(1)_{2m}|_{x=0}\frac{\psi_{2m}(x)}{\psi_{2m}(0)}\right]^{2}\frac{\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)}{x^{2}}\mathrm{d}x$$

$$=I_{1}+I_{2}+I_{3},$$

其中

$$I_{1}=\int_{-\infty}^{+\infty}(1)_{2m}^{2}\frac{\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)}{x^{2}}\mathrm{d}x\to\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)}{x^{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\beta_{2j},$$

$$I_{2}=-2(1)_{2m}|_{x=0}\int_{-\infty}^{+\infty}(1)_{2m}\frac{\psi_{2m}(x)}{\psi_{2m}(0)}\frac{\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)}{x^{2}}\mathrm{d}x$$

$$=-2(1)_{2m}|_{x=0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_{2m}(x)}{\psi_{2m}(0)}\cdot\frac{\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)}{x^{2}}\mathrm{d}x$$

$$-2(1)_{2m}|_{x=0}\int_{-\infty}^{+\infty}[(1)_{2m}-1]$$

$$\cdot\frac{\psi_{2m}(x)}{\psi_{2m}(0)}\frac{\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)}{x^{2}}\mathrm{d}x,$$

由于

$$\frac{\psi_{2m}(x)}{\psi_{2m}(0)}\sim\cos\left[(\sqrt{4m+1})x-\frac{m\pi}{2}\right]+O\left(\frac{1+|x|^{1/6}}{m^{1/6}}\right),$$

故知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_{2m}(x)}{\psi_{2m}(0)}\frac{\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)}{x^{2}}\mathrm{d}x\to 0.$$

又

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}[(1)_{2m}-1]\frac{\psi_{2m}(x)}{\psi_{2m}(0)}\frac{\psi_{2j}(x)-\psi_{2j}(0)}{x^{2}}\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{2m}^{2}(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|(1)_m - 1|^2}{\psi_{2m}^2(0)} \frac{|\psi_{2j}(x) - \psi_{2j}(0)|^2}{x^4} \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

$\to 0.$

故 $I_2 \to 0$，当 $m \to \infty$ 时.

$$I_3 = (1)_{2m}^2|_{x=0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_{2m}^2(x)}{\psi_{2m}^2(0)} \frac{\psi_{2j}(x) - \psi_{2j}(0)}{x^2} \mathrm{d}x$$

$$\sim (1)_{2m}^2|_{x=0} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(\sqrt{4m+1}\,x) \frac{\psi_{2j}(x) - \psi_{2j}(0)}{x^2} \mathrm{d}x$$

$$\to \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_{2j}(x) - \psi_{2j}(0)}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \beta_{2j}.$$

故(10)证毕.

(11)之证：我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 (\delta(x))_{2m}^2 [\psi_{2j}(x) - \psi_{2j}(0)] \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi^2 \psi'_{2m+1}(0)}{4} \cdot \psi_{2m+1}^2(x) \frac{\psi_{2j}(x) - \psi_{2j}(0)}{x^2} \mathrm{d}x.$$

由于

$$\frac{\pi^2 \psi'^2_{2m+1}(0)}{4} \psi_{2m+1}^2(x) \sim \sin^2 \sqrt{4m+1}\,x,$$

故我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 (\delta)_{2m}^2 [\psi_{2j}(x) - \psi_{2j}(0)] \mathrm{d}x \to \beta_{2j}.$$

故(11)获证，因此定理获证.

附录二 Hermite 函数系与 Laguerre 函数系的完备性

我们在第一章根据 Titehmarch E[B6] 的讨论推出了 Hermite 函数系 $\psi_n(x)$ 在 $L_2 \equiv L_2(-\infty, +\infty)$ 中的完备性. 现在我们将根据 Courant-Hilbert，Methods of Mathematical Physics，Vol. 1，1955 所述 Von Neumaun 的思路证明 Laguerre 函数系$\{\varphi_n^\alpha(x); \varphi_n^\alpha(x) = x^{\frac{\alpha}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha(x), \alpha > -1, n = 0, 1, 2, \cdots\}$在 L_2 $(0, +\infty)$的完备性，由此推出$\{\psi_n(x)\}$在 L_2 中的完备性，上述 Couraut-Hilbert 书中断言是用$\{\varphi_n^\alpha(x), \alpha = 0\}$的完备性就可推出$\{\psi_n(x)\}$的完备性似乎困难.

我们先推出$\{\varphi_n^\alpha(x), \alpha > -1, n = 0, 1, 2, \cdots\}$在 L_2 $(0, +\infty)$中的完备性，为此我们注意到恒等式

$$\chi(x, t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \mathrm{e}^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n,$$

两端乘以 $x^{\frac{\alpha}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$，我们就有

$$g(x, t) = \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{(1-t)^{1+\alpha}} \mathrm{e}^{-\frac{1+t}{2(1-t)}x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n^\alpha(x),$$

由此我们推出

$$\int_0^{+\infty}\left(g(x,t)-\sum_{n=0}^{N}t^n\varphi_n^\alpha(x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{1-t^2}-\sum_{n=0}^{N}t^{2n}\to 0,$$

当 $N\to\infty$ 时.

此处我们只需注意到

$$\int_0^{+\infty}g^2(x,t)\mathrm{d}x=\frac{1}{1-t^2},$$

$$\int_0^{+\infty}y(x,t)\varphi_n^\alpha(x)\mathrm{d}x=t^n.$$

令 $a=\frac{1}{2}\frac{1+t}{1-t}$，当 t 从 -1 变到 $+1$ 时，a 从 0 变至 $+\infty$，故知 $x^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{-ax}$ 可以用 $\varphi_n^\alpha(x)$ 的线性组合平均逼近. 由于对任何 $L_2(0,+\infty)$ 的函数可以用 $[0,+\infty)$ 中的连续函数 $f(x)$ 来逼近，其中 $f(x)=0$，当 $x\geqslant A$ 或 $x\leqslant B$，$B<A$ 时，故我们不妨假设 $f(x)$ 已经是这样的函数了，作变换 $\mathrm{e}^{-x}=\xi$，$f(x)=k(\xi)$，此函数 $k(\xi)$ 为 $[0,1]$ 中的连续函数，且 $k(\xi)=0$，当 $0<\xi\leqslant \mathrm{e}^{-A}$ 或 $\xi\geqslant \mathrm{e}^{-B}$，这时

$$\frac{k(\xi)}{\sqrt{\xi}}\left(\lg\frac{1}{\xi}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}$$

也为 $[0,1]$ 中的连续函数，因此可以用 ξ 的多项式

$$\mathrm{H}_n(\xi)=a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n$$

来一致逼近. 因此也平均逼近. 并且 $\frac{k(\xi)}{\sqrt{\xi}}$ 可使 $\left(\lg\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{H}_n(\xi)$ 在 $(0,1)$ 上也平均逼近. 即

$$\int_0^1\left[\frac{k(\xi)}{\sqrt{\xi}}-\left(\lg\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{\alpha}{2}}(a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n)\right]^2\mathrm{d}\xi<\varepsilon,$$

此即：

$$\int_0^1\left[k(\xi)-\left(\lg\left(\frac{1}{\xi}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\xi}(a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n)\right]^2\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}<\varepsilon,$$

或者说

$$\int_0^\infty\left[f(x)-x^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(a_0+a_1\mathrm{e}^{-x}+\cdots+a_n\mathrm{e}^{-nx})\right]^2\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

这就证明了 $f(x)$ 可以 $\{\varphi_n^\alpha(x),n=0,1,\cdots\}$ 的线性组合来平均逼近，$\{\varphi_n^\alpha(x),n=0,1,\cdots;\alpha>-1\}$ 的完备性已证.

为进而证明 $\psi_n(x)$ 在 L_2 中的完备性，设 $f(x)\in L_2$，且连续，$f(x)$ 可表为 $f_1(x)+f_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 为偶函数，$f_2(x)$ 为奇函数，且均属于 L_2.

今当 $x>0$，令 $f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}g(x^2)$，则

$$\int_0^\infty[f_1(x)]^2\mathrm{d}x=\int_0^\infty(u^{\frac{1}{2}}g(u^2))^2\mathrm{d}u.$$

但 $g(u)=u^{-\frac{1}{4}}f_1(\sqrt{u})$，故

$$\int_0^\infty[g(u)]^2\mathrm{d}u=\int_0^\infty[g(x^2)]^2x\mathrm{d}x=\int_0^\infty[g(x^2)x^{\frac{1}{2}}]^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\infty[f_1(x)]^2\mathrm{d}x.$$

即 $g(u)\in L_2(0,+\infty)$. 故存在 φ_n^α 的有限线性组合，使

$$\int_0^\infty\left[g(u)-\sum_{n=0}^{N}a_nu^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}L_n^\alpha(u)\right]^2\mathrm{d}u<\varepsilon,$$

令 $\alpha=-\frac{1}{2}$，$u=x^2$，则有

$$2\int_0^\infty\left[g(x^2)-\sum_{n=0}^{N}a_nx^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}L_N^{-\frac{1}{2}}(x^2)\right]^2x\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

即 $$\int_0^\infty [f_1(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n' e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2n}(x^2)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

或 $$\int_0^\infty [f_1(x) - \sum_{n=0}^{N} b_n \psi_{2n}(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

同样可证，$\{\psi_{2n+1}, n=0,1,\cdots\}$的线性组合可以平均逼近于$f_2(x)$. 故

$$\{\psi_n(x), n = 0,1,2,\cdots\}$$

在 L_2 中完备.

附录三　广义乘子

我们在第四章讨论了广义函数乘法，得到

$$\operatorname{sgn} x \cdot \delta(x) = 0, \tag{1}$$

此式在讨论方程组

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0, \\ v_t + (uv)_x = 0 \end{cases}$$

的 Riemann 问题时用到，但对讨论一般方程组

$$\begin{cases} u_t + (\varphi(u))_x = 0, \\ v_t + (vu)_x = 0, \quad \varphi''(u) > 0 \end{cases} \tag{2}$$

和零压流方程组的 Riemann 问题时就不适用了. 此时我们需要建立等式

$$u(x)\delta(x) = u(0)\delta(x) = a\delta(x) \tag{3}$$

其中

$$u(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ +1, & x > 0. \end{cases}$$

我们注意，如果把 $u(x)$ 看作广义函数，根据第四章则只能得到(1).

只有当我们把 $u(x)$ 看作某种广义乘子，才能得到(3). 我们现在将建立广义乘子的理论.

定义 1　Φ 广义函数

设 Φ 为某种无穷次可微函数组成的基本空间，Φ' 为其广义函数空间，我们说 $T\in\Phi'$ 是指存在 $T_n(x)\in\Phi$，使 $T_n(x)$ 对 Φ 弱收敛，即对任何 $\varphi\in\Phi$，$\langle T_n(x),\varphi(x)\rangle$ 收敛，其极限定义为 $\langle T,\varphi\rangle$.

这样定义的广义函数 T 称之为 Φ 广义函数，其全体记为 Φ'.

定义 2　Φ 乘子 $\alpha(x)$

如果

1) $\alpha(x)$ 无穷次可微.

2) 对任何 $\varphi\in\Phi$，$\alpha(x)\varphi\in\Phi$.

则我们称 $\alpha(x)$ 为 Φ 乘子.

对任何 $T\in\Phi'$，我们可以定义 $\alpha(x)T\in\Phi'$ 如下

$$\langle\alpha(x)T,\varphi(x)\rangle=\langle T,\alpha(x)\varphi(x)\rangle.$$

这样的乘子定义要求太多了，因此我们要把它推广，引进广义乘子的定义.

定义 3　广义函数 T 之 Φ 广义乘子 $\alpha(x)$.

如果存在一系列 Φ 乘子 $\alpha_n(x)$，使

1) $\alpha_n(x)\to\alpha(x)$　　点点.

2) $\alpha_n(x)T$　弱收敛.

则其极限就定义为 $\alpha(x)T$，此时 $\alpha(x)$ 就称为 T 之 Φ 广义乘子.

如果我们取 $\Phi=C_0^\infty$，或 $\Phi=S$，$\alpha(x)$ 表间断函数

$$\alpha(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ a, & x=0,\\ +1, & x>0,\end{cases}$$

则 $\alpha(x)$ 必为 $\delta(x)$ 之 Φ 乘子，因为我们容易知道存在无穷次可微函数 $\alpha_n(x)$ 使

$$\alpha_n(x)=\begin{cases}-1, & x<-\dfrac{1}{n},\\ a, & x=0,\\ +1, & x>\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

而

$$\alpha_n(x)\to\alpha(x)\qquad 点点,$$

$$\begin{aligned}\langle\alpha_n(x)\delta(x),\varphi(x)\rangle&=\langle\delta(x),\alpha_n(x)\varphi(x)\rangle\\&=a\varphi(0)\to\langle a\delta(x),\varphi(x)\rangle,\end{aligned}$$

根据定义我们就有

$$\alpha(x)\delta(x)=a\delta(x).$$

如果我们取

$$\Phi\equiv K\equiv\mathrm{Span}\{\text{Hermite 函数 }\psi_n(x),n=0,1,2,\cdots\},$$

则 Φ' 为弱函数.

我们要问此时 $\alpha(x)$ 是否为 $\delta(x)$ 之 K 广义乘子.

我们注意此时弱函数之乘子域为多项式.

因此问题就在于找到多项式序列 $P_n(x)$，$n=0,1,2,\cdots$，使

$$P_n(x) \to \alpha(x) \qquad \text{点点}.$$

对这样的 $P_n(x)$ 当然有

$$\begin{aligned}\langle P_n(x)\delta(x),\ \varphi(x)\rangle &= \langle \delta(x),\ P_n(x)\varphi(x)\rangle \\ &= P_n(0)\varphi(0) \to \alpha(0)\varphi(0) \\ &= \langle a\delta(x),\ \varphi(x)\rangle.\end{aligned}$$

我们可如此进行.

今 $\alpha(x)$ 为间断函数,我们可先把它连续化. 为简单记,不妨设 $|a|<1$,今取

$$\alpha^k(x) = \begin{cases} -1, & x < -\dfrac{1}{k} \\ (1+a)k+a, & -\dfrac{1}{k} < x < \dfrac{1-a}{1+a}\dfrac{1}{k}, \\ +1, & x > \dfrac{1-a}{(1+a)k}. \end{cases}$$

显然 $\alpha^k(x)$ 连续,且当 $k \to +\infty$ 时,点点趋于 $\alpha(x)$.

把 $\alpha^k(x)$ 展为 Hermite 多项式级数

$$\alpha^k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k \mathrm{H}_n(x),$$

$$a_n^k = \frac{1}{c_n^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^k(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{H}_n(x)\mathrm{d}x,$$

$$c_n^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

对任何固定 k,根据定理 1.7.1,我们有

$$\begin{aligned}S_m^k(x) &= \sum_{n=0}^{m} a_n^k \mathrm{H}_n(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^k \mathrm{e}^{-x^2} K_m(x,y)\mathrm{d}y \to \alpha^k(x) \ \text{点点,当}\ m \to \infty\end{aligned}$$

时,

其中 $$K_m(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{m} \frac{\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(y)}{2^n n!}.$$

我们注意到当 k 充分大时,对固定点 x_0,$\alpha^k(x_0) = \alpha(x_0)$.

如果我们逐次检查定理 1.7.1 的证明,我们将会发现如果取 $m = k^5$,则

$$P_k(x) = S_k^{k^5}(x) \to \alpha(x) \qquad \text{点点}.$$

故此时 $\alpha(x)$ 依然为 $\delta(x)$ 的 K 广义乘子,而有

$$\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x) = a\delta(x).$$

此式即(3).

由此,当我们考虑方程组(2)的 Riemann 问题时其广义势

$$w(x,t) = \int_{(0,0)}^{(x,t)} v\mathrm{d}x - uu\mathrm{d}t$$

在弱函数的意义下,满足

$$w_t + uw_x = 0.$$

同样根据第四章零压流方程组 Riemann 问题的讨论,也知其广义势在弱函数的意义下满足方程.

参 考 文 献

[1] Ding Xiaqi. On a non-strictly hyperbolic system. Preprint Dept. of Math. University of Jyvaskyla 167, 1993, pp1-8.

[2] 丁夏畦. 弱收敛与弱解. 中国科学院数学研究所年报(2003 年).

[3] Ding Xiaqi, Chen G Q and Luo P Z. Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics Ⅰ. Acta Math. Sci. (English Ed), 5(1985), pp415-432.

[4] Ding Xiaqi, Chen G Q and Luo P Z. Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics Ⅱ. Acta Math. Sci. (English Ed), 5(1985), pp433-472.

[5] Ding Xiaqi, Chen G Q and Luo P Z. Convergence of the fractional step Lax-Friedrichs scheme and Godunov scheme for isentropic gas dynamics. Comm. Math. Phys. 121(1989), pp63-84.

[6] Ding Xiaqi and Ding Yi. Viscosity method of a non-homogeneous Burgers equation. Acta Mathematica Scientia, 23 B(4), 2003, pp567-576.

[7] Ding Xiaqi, Jiu Quansen and He Cheng. On a non-homogeneous equation. Science in China, 2001, 44 (8), pp984-993.

[8] Ding X, Li C and Huang F. Non-classical generalized solutions for same hyperbolic systems. Sys, Sci. Math. Sci. Vol 12, suppl May, 1999, pp1-13.

[9] Ding Xiaqi and Luo Peizhu. Generalized expansions in Hilbert space. Acta Mathematica Scientia, 19 (3), 1999, pp241-250.

[10] Ding Xiaqi and Luo Peizhu. Weak convergence of some Dirichlet series. Acta Mathematica Scientia, 20B(4), 2000, pp433-441.

[11] Ding Xiaqi and Luo Peizhu. Weak convergence of some Dirichlet series. Acta Mathematica Scientia, 21B(4), 2001, pp433-439.

[12] Ding Xiaqi and Luo Peizhu. Mellin transform in weak functions and Münts formula. Acta Mathematica Scientia, 23(B)(3), 2003, pp413-418.

[13] Ding Xiaqi and Luo Peizhu. More about Mellin transform in weak functions and Münts formula. Acta Mathematica Scientia, 24B(1), 2004, pp1-8.

[14] Ding Xiaqi and Luo Peizhu. Generalized weak functions. Acta Mathematica Scientia (accepted).

[15] Ding Xiaqi and Luo Peizhu. On an identity of Ramanujian. Acta Mathematica Scientia, 22B(3), 2002, pp289-294.

[16] Ding Xiaqi and Wang Zhen. Multiplication of weak functions. Acta Mathematica Scientia.

[17] Ding Yi. On a new functional equation (to appear).

[18] Ding Yi and Huang Feimin. On a non-homogeneous system of pressureless flow. Quar. Appl. Math. 2004, Vol. 62, No. 3, pp509-528.

[19] 冯康.广义函数论.数学进展,1(3),1955,pp405-540.

[20] Feng Kang. Generalized Mellin Transform. Acta Mathematica Scientia.

[21] 华罗庚.广义函数导引.数学进展,6(4),1962,pp391-409.

[22] Huang Feimin and Wang Zhen. Convergence of viscosity solution for isothemal gas dynamics. SIAM J. Math. Anal. 24(3), 2002, pp599-610.

[23] Huang Feimin and Wang Zhen. Well possedness for pressureless flow. Commulication of Math. Physics, 222(1), 2001, pp117-146.

[24] Li J, Zhang T and Yang S. The two-dimensional Riemann problems in gas dynamics. Pitman, Mornographs and surveys in pure and Applied Math. 98, Longman Harcow, 1998.

[25] Bateman H. Transcendantal functions, Vol Ⅱ. New York, 1953.

[26] Lebedev. Special functions and their applications. New York, 1972.

[27] 李邦河,李雅卿.广义函数及其解析和调和表示.国防工业出版社,1992.

[28] Lighthill M J. Introduction of Fourier analysis and generalized functions. Cambridge University Press, 1958.

[29] Schwartz L. Théorie des distributions. Paris Herman, 1966.

[30] Titchmarsh E C. Introduction to the theory of Fourier Integrals. Oxford, 1948.

[31] Titchmarsh E C. The theory of Riemann zeta function. Oxford, 1951.